

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Josip Jakovac

RAČUNALNO KOMPONIRANJE I GLAZBENE  
VARIJACIJE GENERIRANE KAOTIČNIM  
PRESLIKAVANJEM

Diplomski rad

Zagreb, 2017. godine

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI  
STUDIJ FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Josip Jakovac**

Diplomski rad

**Računalno komponiranje i glazbene  
varijacije generirane kaotičnim  
preslikavanjem**

Voditelj diplomskog rada: Doc.dr.sc Danko Radić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2017. godine

Zahvaljujem mom mentoru, doc. dr. sc. Danku Radiću, za ogroman trud koji je uložio sa puno strpljenja kako bi ovaj, pomalo interdisciplinarni rad, ispao što bolji, kao i izv. prof. dr. sc. Mariu Basletiću, koji je dobrovoljno puno pomogao oko glazbeno-teorijskog dijela analize, kao i oko tehničkih stvari vezanih za Latex. Zahvaljujem i prof. Srđanu Dediću, koji me je uveo u svijet računalne kompozicije/varijacije, koristeći svoje slobodno vrijeme. Hvala kolegici Steli Vugrinčić što me inspirirala da počnem razmatrati problematiku računalne kompozicije, kao i doc. dr. sc. Nikoli Poljaku, koji je postigao da to inspiriranje prestane dok nije prekasno. Hvala i kolegicama Sari Metelko za pomoć pri odabiru naslova kompozicija, a Petri Grozić što je strpljivo preslušavala pokušaje računalnog skladanja, i savjetovala me kako da to obavim što bolje (slušljivije). Veliko hvala kolegicama Karolini Matejak i Katarini Jurišić, bez čije pomoći vjerojatno ne bih uspio završiti metodički dio rada. A posebne zahvale idu kolegicama Anna-Marii Križanac i Günseli Çetin (ODTÜ, Çankaya/Ankara), koje su me inspirirale, između ostalog, da se unaprijedim u klasičnoj glazbenoj kompoziciji.

## Sažetak

U prvom dijelu ovog rada, ukratko opisujem neke pojmove vezane za dinamičke sustave te uvodim osnovne glazbene termine, čije poznavanje olakšava čitatelju razumijevanje daljnjeg teksta. U drugom dijelu opisujem algoritme za glazbenu kompoziciju (IFS-ov atraktor) i glazbene varijacije (Lorenzov atraktor), koje koristim za računalno komponiranje, tj. računalno variranje već gotove kompozicije ljudskog autora. Također, opisuju se svojstva i teorijska pozadina alata za analizu već spomenutih djela. Na kraju su predstavljeni rezultati analize glazbenih kompozicija nastalih pomoću IFS atraktora, dok je za varijacije na zadanu temu prikazano 3 primjera istih.

Ključne riječi: Kaotična glazbena kompozicija, IFS, Lorenzov atraktor, fraktal, samosličnost

# Computer-aided composition and musical variations generated by chaotic mapping

## **Abstract**

Part one of this thesis is used to shortly describe some terms related to dynamical systems and basic music theory, knowledge of which may make easier for the reader to go through the rest of the text. In part two, I describe algorithms for musical composition (IFS attractor) and musical variation (Lorenz attractor), that are used for computer-aided musical composition / musical variations of human author's composition. This part is also used to describe properties and theoretical background of analysis tools for works created by those algorithms. At the end, results of analysis for IFS musical compositions are presented, while for variations, three of those are shown.

Keywords: Chaotic music composition, IFS, Lorenz attractor, fractal, self-similarity

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Dinamički sustavi</b>	<b>2</b>
2.1	Fiksne točke . . . . .	2
2.1.1	Osnovne vrste fiksnih točaka . . . . .	3
2.1.2	Linearizacija oko fiksne točke . . . . .	4
2.1.3	Stabilnost fiksne točke . . . . .	5
2.1.4	Granično kolo . . . . .	6
2.2	Bifurkacije . . . . .	7
2.2.1	Bifurkacije u jednodimenzionalnom dinamičkom sustavu . . . . .	7
2.2.2	Hopfova bifurkacija . . . . .	7
2.2.3	Homoklinična bifurkacija . . . . .	11
2.3	Kaos u dinamičkim sustavima . . . . .	11
2.4	Lorenzov model . . . . .	13
2.4.1	Svojstva Lorenzovog dinamičkog sustava . . . . .	14
2.4.2	Ulazak u kaotično ponašanje . . . . .	15
2.5	Diskretna preslikavanja . . . . .	16
2.5.1	Fiksne točke i njihova stabilnost . . . . .	17
2.5.2	Metoda sukcesivnih slika . . . . .	17
2.6	Fraktali . . . . .	18
2.6.1	Cantorov skup . . . . .	18
2.6.2	Fraktalna dimenzija . . . . .	19
2.7	Hausdorff - Besicovicheva i "Box-counting" dimenzija . . . . .	20
2.8	Sustavi iteracijskih funkcija (IFS) . . . . .	21
2.8.1	Kontraktivne linearne transformacije . . . . .	21
2.8.2	Deterministički i nedeterministički IFS algoritmi . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Neki glazbeni termini</b>	<b>23</b>
3.1	Tempo . . . . .	23
3.2	Visina tona . . . . .	23
3.3	Interval . . . . .	23
3.4	Trajanje tona . . . . .	25

3.5	Dinamika . . . . .	25
3.6	Kvintni krug . . . . .	26
3.7	Ljestvica . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Kompozicijski i varijacijski algoritmi te alati za analizu</b>	<b>28</b>
4.1	Kompozicijski algoritam . . . . .	28
4.1.1	Generiranje frekvencija i glazbenih tonova . . . . .	29
4.1.2	Generiranje ritmičkih vrijednosti trajanja tonova . . . . .	32
4.1.3	Dinamičke vrijednosti tonova . . . . .	33
4.2	Varijacijski algoritam . . . . .	33
4.2.1	Proces variranja visine tona originalne kompozicije . . . . .	34
4.3	Objektivna melodijska analiza . . . . .	34
4.3.1	Raznolikost tonskih visina u kompoziciji . . . . .	34
4.3.2	Krumhansl-Schmucklerova (K-S) metoda određivanja tonaliteta u kompoziciji . . . . .	35
4.3.3	Težnja za ulaznom, silaznom ili konstantnom melodijskom kon- turom . . . . .	35
4.3.4	Stabilnost uzlazne, silazne, ili unisone melodijske konture . . . . .	35
4.3.5	Jačina klimaksa . . . . .	36
4.3.6	Grafička prezentacija objektivnih svojstava kompozicije . . . . .	36
4.4	Subjektivna melodijska analiza . . . . .	36
4.4.1	Melodijska kompleksnost . . . . .	36
4.4.2	Melodijska originalnost . . . . .	37
4.4.3	Stupanj melodioznosti . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Rezultati</b>	<b>38</b>
5.1	Kompozicije . . . . .	39
5.1.1	DR . . . . .	39
5.1.2	CBM . . . . .	42
5.1.3	Stela . . . . .	46
5.1.4	G-MiŽe . . . . .	50
5.2	Varijacije na temu . . . . .	54
5.2.1	Tema za variranje . . . . .	54
5.2.2	AMK1 - prva varijacija na temu . . . . .	54

5.2.3	AMK2 - druga varijacija na temu . . . . .	55
5.2.4	AMK3 - treća varijacija na temu . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>57</b>
<b>7</b>	<b>Metodički dio</b>	<b>57</b>
7.1	Nastavna priprema: Deterministički kaos . . . . .	57
7.1.1	Uvodni dio sata: otvaranje problema, prikupljanje ideja, upoznavanje pojave . . . . .	58
7.1.2	Središnji dio sata: konstrukcija modela - fizikalni i matematički opis pojave. . . . .	59
7.1.3	Završni dio sata: primjena modela - korištenje novostečenog znanja u novim situacijama, provjera ostvarenosti obrazovnih ishoda . . . . .	65
7.1.4	Zadaci . . . . .	65
	<b>Dodaci</b>	<b>67</b>
	<b>A IFS kodovi</b>	<b>67</b>
	<b>Literatura</b>	<b>68</b>



# 1 Uvod

Cilj ovog rada je približiti čitatelju mogućnosti glazbene kompozicije pomoću kaotičnih dinamičkih sustava. Sama računalna kompozicija nije nepoznat pojam još od pojave pristupačnih kućnih računala, s jednostavnim zvučnim procesorima i BASIC interpreterom u ROM-u 80-ih godina prošlog stoljeća, a nešto češće korišteni algoritmi temeljeni su na Markovljevim lancima, Generativnoj gramatici, Petrijevim mrežama, itd. Kaotični modeli su ostali nekako po strani. Ta činjenica potakla me da istražim upravo tu temu te sam napravio usporedbu glazbenih značajki kompozicija koje nastanu računalnim komponiranjem na temelju sustava iteracijskih funkcija (Iteration Function Systems, u daljnjem tekstu "IFS"), tj. fraktala. Lorenzov atraktor (u daljnjem tekstu "Lorenz") sam pak iskoristio za generiranje varijacija na zadanu temu. Računalno komponiranje je metoda, tj. algoritam koji na temelju ulaznog "signala", generiranog kaotičnim dinamičkim sustavom, kreira glazbenu partituru procesiranjem ulaznog signala u okviru zakonitosti (izabrane) harmonije.

U ovom radu bit će dan kratki pregled teorije dinamičkih sustava koji vode na kaotične sekvence, kratki pregled temeljnih pojmova klasične harmonije, objašnjen algoritam za računalno komponiranje te predstavljeni rezultati teorijsko-glazbene analize generiranih kompozicija.

## 2 Dinamički sustavi

[1, 2] Dinamički sustav je sustav, opisan određenim brojem varijabli, koji evoluira u vremenu. Primjene dinamičkih sustava mogu biti u područjima fizikalnih sustava (generalizirane jednadžbe gibanja), biologije (populacijski modeli), kemije (dinamika kemijske reakcije), tehnologije (oscilatori, hidrodinamika, turbulencije), geologije (potresi), meteorologije (modeli atmosfere i vremena), kvantne mehanike, neravnotežne termodinamike, a, pokazat ću ovim radom, između ostalog i glazbene kompozicije.

Da bi uspješno modelirali dinamički sustav, potrebno je napraviti nekoliko koraka. Prvo je potrebno odrediti fizikalne pretpostavke modela, tj. naći veze među veličinama koje će se proučavati. Nakon toga, valja opisati sve varijable i parametre koji se koriste u modelu. Dok varijable mogu biti nezavisne i zavisne (funkcije nezavisnih varijabli), parametri su veličine koje se ne mijenjaju kao funkcije nezavisne varijable, ali čijom kontrolom "izvana" određujemo svojstva modela. Koristeći početne fizikalne pretpostavke, konstruiramo jednadžbe koje povezuju već definirane varijable i parametre te određuju evoluciju zavisnih varijabli u ovisnosti o nezavisnima.

Dinamički sustavi mogu biti kontinuirani ili diskretni. Kontinuirani su opisani diferencijalnim jednadžbama, a diskretni diferencijalnim jednadžbama (mapama). O diskretnim dinamičkim sustavima će kasnije biti više riječi, a za kontinuirane valja još napomenuti da postoje autonomni

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t)) \quad (2.1)$$

na koje okolina ne djeluje (postoji samo implicitna ovisnost o vremenu) i neautonomni

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t); t) \quad (2.2)$$

gdje je utjecaj okoline dan eksplicitnom ovisnosti o vremenu.

### 2.1 Fiksne točke

Promotrimo autonomni kontinuirani dinamički sustav. Rješenja istog možemo opisati vektorom

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), n \in N. \quad (2.3)$$

Vektor

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.4)$$

egzistira u *faznom prostoru* dimenzije  $n$ . Skup svih trajektorija u faznom prostoru, tj. skup svih rješenja  $\vec{x}(t)$  nazivamo *fazni tok*.

Da bi se dobile informacije o dinamičkom sustavu, potrebno je analizirati taj fazni tok. Za uspješnu analizu istog, potrebno je prvo odrediti *fiksne točke* faznog toka. One su asimptotska rješenja autonomnog sustava te time određuju topologiju faznog prostora. Sustav kroz nju evolucijom ne može proći, već joj se asimptotski približava u vremenu.

### 2.1.1 Osnovne vrste fiksnih točaka

Imamo dinamički sustav sa samo jednom zavisnom varijablom, oblika

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (2.5)$$

Fiksna točka  $x_c$  je *jednostavna* ako su zadovoljeni uvjeti

$$f(x_c) = 0, \frac{df(x)}{dx}|_{x_c} \neq 0. \quad (2.6)$$

Ako vrijedi

$$\frac{df(x)}{dx}|_{x_c} < 0,$$

ona je jednostavna *stabilna* a ako je

$$\frac{df(x)}{dx}|_{x_c} > 0$$

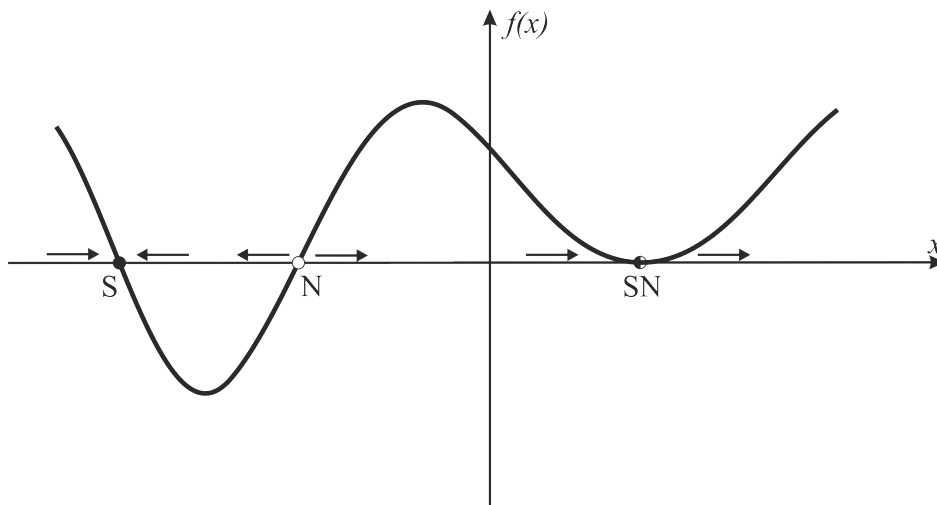
fiksna točka je jednostavna *nestabilna* (rješenje se asimptotski udaljava od  $x_c$  kako se vrijeme udaljuje od  $t=-\infty$ ).

Ako za  $x_c$  vrijede uvjeti

$$f(x_c) = 0, \frac{df(x)}{dx}|_{x_c} = 0, \quad (2.7)$$

tada se radi o *složenoj* fiksnoj točki. Pri malim perturbacijama sustava, fiksna točka ili nestaje, ili od nje nastaju dvije fiksne točke, jedna stabilna, druga nestabilna. Zbog takvog svojstva se složena fiksna točka naziva *strukturno nestabilna*. Rješenje se s jedne strane asimptotski približava, a s druge strane asimptotski udaljava od  $x_c$ ,

za  $t \rightarrow \pm\infty$ .



Slika 2.1: Dinamički sustav određen je s  $f(x)$ . Prikazane su stabilna (crni kružić), nestabilna (bijeli kružić) i strukturno nestabilna (crno-bijeli kružić) fiksna točka. Strelice između njih označavaju fazni tok.

Na primjeru sa slike 2.1 vidimo kako se mogu i grafički prikazati fiksne točke pomoću dijagrama toka: za

$$\frac{df(x)}{dx} > 0$$

fazni tok na tom području ide *u desno*, dok za

$$\frac{df(x)}{dx} < 0$$

ide *u lijevo*. Ovisno o tome slijeva li se tok u točku, ili iz nje izlazi, fiksna točka je stabilna ili nestabilna. Strukturno nestabilna fiksna točka ima dvojako ponašanje.

### 2.1.2 Linearizacija oko fiksne točke

Da bismo klasificirali fiksne točke, koristimo metodu linearizacije dinamike oko njih.

Pretpostavimo da imamo sustav 2. reda:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \frac{dy}{dt} = g(x, y). \quad (2.8)$$

Nakon što pronađemo koordinate fiksne točke  $(x^*, y^*)$ , uvedimo varijable

$$u = x - x^*, v = y - y^* \quad (2.9)$$

koje predstavljaju komponente po volji bliske orbite fiksnoj točki. Da bi saznali udaljava li se orbita ili približava fiksnoj točki, valja napisati diferencijalne jednadžbe za  $u$  i  $v$ , koje se zatim razviju u Taylorov red:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}, \\ \frac{dv}{dt} &= u \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Zanemarili smo kvadratične članove u razvoju, pa se pomak može zapisati kao:

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\tag{2.11}$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

matrica linearne transformacije u fiksnoj točki  $(x^*, y^*)$ .

### 2.1.3 Stabilnost fiksne točke

Svojstvene vrijednosti matrice  $A$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}$  nam služe za opis tipova stabilnosti fiksne točke.

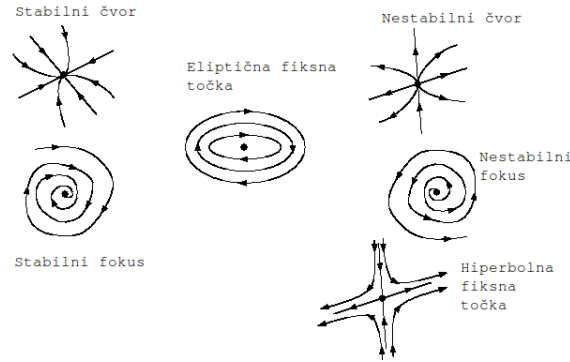
- Ako je  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ,  $\forall i$ , fiksna točka je *stabilni fokus*
- Ako je  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ ,  $\forall i$ , fiksna točka je *nestabilni fokus*
- Ako je  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ ,  $\forall i$ , fiksna točka je *eliptična fiksna točka*
- Ako  $\exists i$  za koje je  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ , a za ostale  $j \neq i$  je  $\text{Re}(\lambda_j) \geq 0$ , fiksna točka je *sedlena fiksna točka*

Struktura faznog toka oko ovih, najčešćih fiksnih točaka prikazana je na slici 2.2.

Lieva derivacija

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \Big|_{(\vec{x}_0)}\tag{2.12}$$

gdje je  $n \in \mathbb{N}$  red sustava, govori nam što se događa s diferencijalnim volumenom faznog prostora oko točke  $\vec{x}_0$ . Ako je  $L < 0$ , fazni prostor se kontraktira, ako je  $L > 0$ , fazni prostor se širi, a ako je  $L = 0$ , fazni prostor ostaje nepromijenjen, tj. radi se o konzervativnom sustavu.



Slika 2.2: Osnovni tipovi fiksnih točaka

U promatranom sustavu 2. reda Lieva derivacija je  $L(\vec{x}_c) = Tr[A]_{\vec{x}_c}$

#### 2.1.4 Granično kolo

Granično kolo je izolirana zatvorena trajektorija, što bi značilo da susjedne trajektorije nisu zatvorene - one se kreću prema graničnom kolu, ili od njega. Dakle, ako sve susjedne trajektorije prilaze graničnom kolu, ono je *stabilno*. U suprotnom, granično kolo je *nestabilno*.



Slika 2.3: Granična kola

Granična kola modeliraju sustave koji osciliraju bez neke vanjske periodičke pobude. Primjeri istih su kucanje srca, dnevne oscilacije temperature ljudskog tijela, lučenje hormona, satovi, generatori takta u računalima, itd.

Granična kola postoje samo u nelinearnim disipativnim sustavima. Npr. linearni sustav ima zatvorene orbite, ali one neće biti *izolirane*.

Ako je Jacobian (determinanta matrice  $A$ ) singularan, tj. imamo jednu iščezavajuću svojstvenu vrijednost u 2D sustavu, tada nije samo fiksna točka, već cijela kontinuirana linija singularna (možemo zamisliti kao kontinuirani niz čvorova). Zamislimo stabilnu fiksnu točku i mijenjamo joj parametar  $\mu$ . Fiksna točka će za  $\mu = \mu_c$  preko bifurkacije izgubiti stabilnost. Globalni fazni tok i dalje ide u smjeru te fiksne točke, koja je lokalno

izgubila stabilnost - jedini topološki način da se to ostvari u 2. dimenzije jest da se oko sada nestabilne fiksne točke stvori kontinuirana linija, a to je stabilno granično kolo.

## 2.2 Bifurkacije

### 2.2.1 Bifurkacije u jednodimenzionalnom dinamičkom sustavu

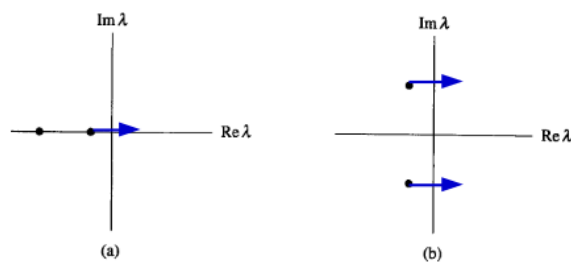
Bifurkacija je pojava pri kojoj mala promjena vrijednosti parametara izazove topološku promjenu u faznom prostoru dinamičkog sustava.

Svi parametri dinamičkog sustava razapinju tzv. *parametarski prostor*. U njemu, zavisno o parametrima, unosimo fiksne točke i događaje među/s njima zavisno o tome kako se parametri mijenjaju (jer fiksne točke su te koje određuju topologiju faznog prostora).

U jednoparametarskom autonomnom dinamičkom sustavu razlikujemo nekoliko tipova bifurkacija. Pri *tangencijalnoj bifurkaciji*, dvije jednostavne fiksne točke, jedna stabilna, a druga nestabilna, nestanu nakon prelaska parametra preko granične vrijednosti (bifurkacijske točke). Ako se dogodi *bifurkacija sa promjenom stabilnosti*, tada fiksne točke (jedna nestabilna, jedna stabilna) zamijene stabilnost. Ako je pak u pitanju *rašljasta (pitchfork) bifurkacija*, iz jedne stabilne fiksne točke nastaju tri fiksne točke, jedna nestabilna i dvije stabilne.

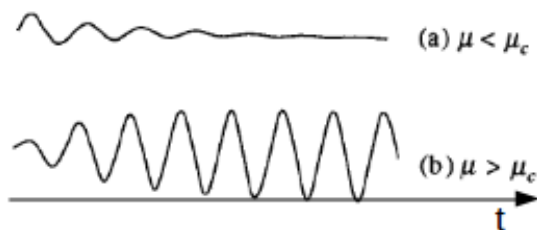
### 2.2.2 Hopfova bifurkacija

Zamislimo dvodimenzionalni dinamički sustav sa stabilnom fiksnom točkom (Hopfova bifurkacija se može pojaviti u sustavu reda  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) te promotrimo svojstvene vrijednosti matrice transformacije  $A$ . Na slici 2.4, pod (a) i (b) su prikazana u kompleksnoj ravnini pomoću  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  dva moguća načina da fiksna točka izgubi stabilnost. Nas zanima postav prikazan pod (b). Promjenom parametra  $\mu$  možemo kompleksno konjugirane svojstvene vrijednosti prenijeti preko imaginarne osi, te tako fiksnu točku učiniti nestabilnom. Nakon toga, oko nje se formira stabilno granično kolo - kontinuirana singularna linija, a mehanizam kojim nastaje nazivamo *Hopfovom bifurkacijom*. Zamislimo oscilirajući sustav koji dolazi u ravnotežno stanje preko podkritičnog gušenja,



Slika 2.4: Kompleksna ravnina sa svojstvenim vrijednostima

te da amplitudu kontroliramo pomoću parametra  $\mu$ . Mijenjajući taj parametar, nakon  $\mu = \mu_c$  sustav ponovo povećava elongaciju (tu ravnotežno stanje gubi stabilnost) te počne oscilirati malom konstantnom amplitudom oko bivšeg ravnotežnog položaja - kažemo da se giba po graničnom kolu.



Slika 2.5: Načini osciliranja sustava ovisno o vrijednosti parametra  $\mu$

Dakle, Hopfova bifurkacija se pojavi kad stabilni fokus prelazi u nestabilni, okružen graničnim kolom.

### Nadkritična hopfova bifurkacija

Uzmimo za primjer sustav opisan diferencijalnim jednadžbama

$$\frac{dr}{dt} = \mu r - r^3, \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (2.13)$$

u polarnom koordinatnom sustavu  $(r, \theta)$ . Fiksne točke su  $r_1=0$ ,  $r_2 = \sqrt{\mu}$ . Dakle,  $\mu_c = 0$ , pošto za pozitivne vrijednosti tog parametra imamo dvije realne nultočke, a za negativne samo jednu.

Pogledajmo kako se svojstvene vrijednosti sustava ponašaju tijekom bifurkacije. Pre-



bacimo diferencijalne jednadžbe u kartezijev sustav, čime jednadžbe postaju

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - \omega y, \frac{dy}{dt} = \mu y + \omega x. \quad (2.14)$$

Sada lako dobijemo matricu transformacije u ishodištu

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

sa svojstvenim vrijednostima  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega$ , što nam govori da ishodišna fiksna točka izgubi stabilnost prelaskom parametra preko kritične vrijednosti  $\mu_c=0$ .



Slika 2.6: Fazni tok sustava s nadkritičnom Hopfovom bifurkacijom zavisno o vrijednosti parametra  $\mu$

### Podkritična hopfova bifurkacija

Neka je sustav opisan diferencijalnim jednadžbama

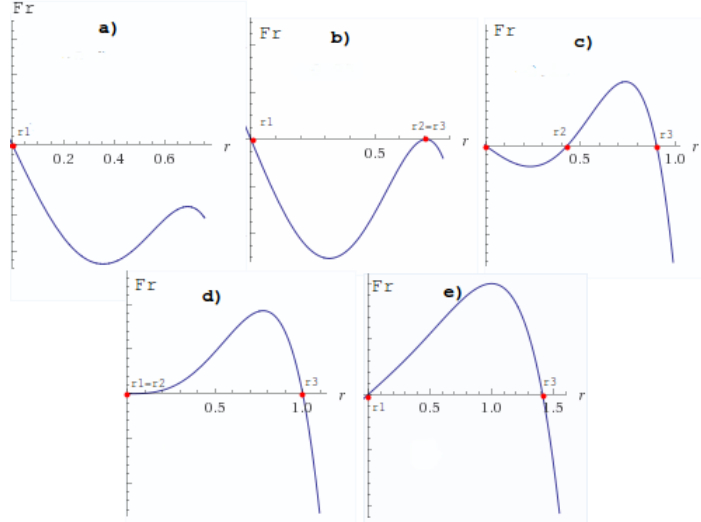
$$\frac{dr}{dt} = \mu r + r^3 - r^5, \frac{d\theta}{dt} = \omega. \quad (2.16)$$

Nalazimo fiksne točke  $r_1 = 0$ , te  $r_{2,3,4,5}^2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4\mu})$ . Promatrajući kvadratni izraz, možemo izračunati *kritične vrijednosti* parametra  $\mu_{c1} = -\frac{1}{4}$  i  $\mu_{c2} = 0$ .

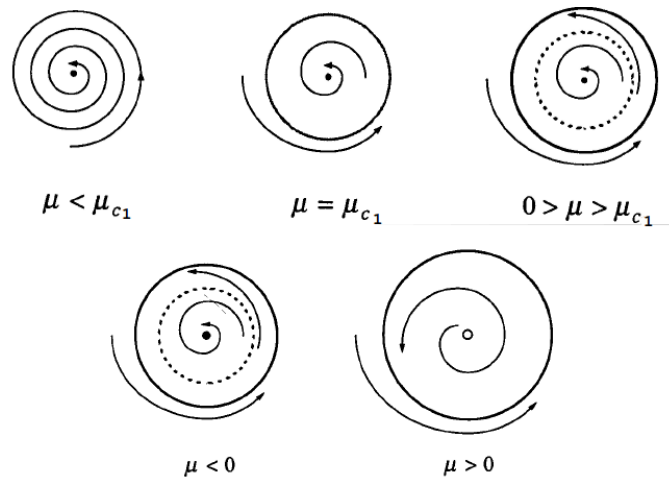
Promotrimo promjene topoloških karakteristika sustava pri promjeni parametra.

- Za  $\mu < \mu_{c1}$  postoji jedna stabilna fiksna točka  $r_1 = 0$ .
- Za  $\mu = \mu_{c1}$  postoje dvije fiksne točke,  $r_1 = 0$  (stabilna),  $r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (strukturno nestabilna, koja bifurkacijom pređe u stabilno i nestabilno granično kolo (nestabilno do vanjskog stabilnog)).
- Za  $\mu_{c1} < \mu < \mu_{c2}$  postoje i dalje stabilna fiksna točka  $r_1 = 0$  te nestabilno i stabilno granično kolo radijusa  $r_{2,3}$ . Kako vrijednost parametra  $\mu$  raste, tako se nestabilno granično kolo r radijusa  $r_2$  sve više udaljava od stabilnog i sužava se oko fiksne točke, dok se stabilno granično kolo radijusa  $r_3$  povećava.

- Za  $\mu = \mu_{c2}$  nestabilno granično kolo se stapa sa stabilnom fiksnom točkom, te ona izgubi stabilnost. Stabilno granično kolo i dalje egzistira.
- Za  $\mu > \mu_{c2}$  postoje nestabilna fiksna točka  $r_1 = 0$  i stabilno granično kolo radijusa  $r_3$ .



Slika 2.7: Grafički prikaz nultočaka pri promjeni parametra  $\mu$ : a)  $\mu < \mu_{c1}$ ; b)  $\mu = \mu_{c1}$ ; c)  $\mu_{c1} < \mu < \mu_{c2}$ ; d)  $\mu = \mu_{c2}$ ; e)  $\mu > \mu_{c2}$ . Pri crtanju grafova korištene su numeričke vrijednosti: a)  $\mu = -0.3$ ; b)  $\mu = -0.25$ ; c)  $\mu = -0.15$ ; d)  $\mu = 0$ ; e)  $\mu = 2$ .



Slika 2.8: Fazni tok sustava s podkritičnom Hopfovom bifurkacijom za određene vrijednosti parametra  $\mu$ .

Na slici 2.8 vidimo kako se ponaša fazni tok zavisno o promjeni parametra  $\mu$ , u područjima određenim kritičnim točkama parametra.

U slučaju podkritične Hopfove bifurkacije dolazi do pojave *histereze*. Ako oscilacije počnu sa velikom amplitudom, one se ne mogu ugušiti vraćanjem parametra  $\mu$  na

$\mu_{c2}$ , nego se mora postaviti  $\mu=\mu_{c1} < \mu_{c2}$  da bi oscilacije konačno utihnule. Ako pak oscilacije počnu sa malom amplitudom, one se neće povećati sve do  $\mu=\mu_{c2} > \mu_{c1}$ .

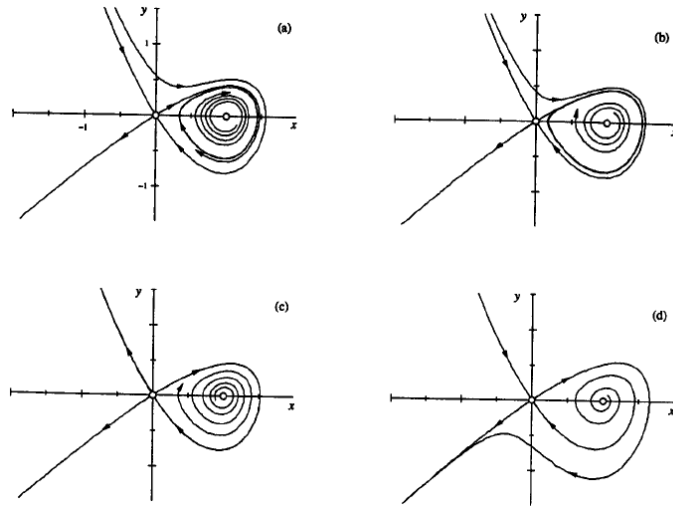
### 2.2.3 Homoklinična bifurkacija

U ovom slučaju se granično kolo približava sedlenoj fiksnoj točki, a u trenutku bifurkacije oni se dotaknu te nastane homoklinička orbita, tj. ona koja počinje i završava u istoj (fiksnoj) točki.

Jednadžbe koje opisuju takav sustav su na primjer

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \mu y + x - x^2 + xy \quad (2.17)$$

Pogledajmo na slici 2.9 kako se fazni tok sustava ponaša prije, tijekom i nakon bifurkacije za određene vrijednosti parametra  $\mu$ .



Slika 2.9: Fazni tok sustava za određene vrijednosti parametra  $\mu$ .

Numerički je nađen  $\mu_c \approx -0.8645$ . Početak prikazanog scenarija je situacija gdje se granično kolo nalazi u blizini sedlene fiksne točke (a). Kako se vrijednost parametra  $\mu$  približava  $\mu_c$ , granično kolo se povećava (b), te se konačno za graničnu vrijednost dotirne sa sedlenom fiksnom točkom, stvarajući homokliničku orbitu (c), dok za  $\mu > \mu_c$  graničnog kola i homokliničke orbite više nema, tj. ostaju samo sedlo i nestabilni fokus.

## 2.3 *Kaos u dinamičkim sustavima*

Deterministički dinamički sustavi, čije je buduće ponašanje u potpunosti određeno dinamikom sustava i početnim uvjetima, generalno mogu biti vrlo osjetljivi na početne

uvjete. U takvim slučajevima, ako uzmemo dvije trajektorije proizvoljno blizu u faznom prostoru, one će završiti na sasvim suprotnim stranama faznog prostora nakon dovoljno dugo vremena. To nazivamo *pojavom kaotičnosti* u sustavu. Posljedica preosjetljivosti na početne uvjete jest da ako počnemo sa ograničenom količinom informacija o sustavu (što u stvarnosti i je slučaj), nakon nekog vremena on više neće biti predvidljiv. No, vrijeme za koje se još evolucija takvog sustava može predvidjeti zavisi o tri stvari: koliko nepouzdanosti može biti tolerirano u predviđanju, koliko precizno trenutno stanje sustava može biti izmjereno, te o karakterističnoj vremenskoj skali na kojoj je dinamički sustav kaotičan (vrijeme Lyapunova, npr. za kaotične električne krugove iznosi oko milisekunde, za vremensku prognozu par dana, za sunčev sustav 50 milijuna godina). Dinamika u okolini fiksnih točaka kaotičnih sustava poprima neobična i nestandardna svojstva u podprostoru faznog prostora kojih ih okružuje i u koji se fazni tok slijeva. Taj podprostor se naziva čudni atraktor.

### **Atraktor i čudni atraktor**

Atraktor se može definirati kao zatvoreni skup  $A$  sa sljedećim svojstvima:

- $A$  je invarijantan skup: bilo koja trajektorija  $\vec{X}(t)$  koja počinje u  $A$ , ostaje u  $A$  cijelo vrijeme.
- $A$  privlači otvoren skup početnih uvjeta: neka postoji otvoren skup  $U$ , koji sadrži  $A$ , tako da ako  $\vec{X}(0) \in U$ , tada udaljenost od  $\vec{X}(t)$  do  $A$  teži ka 0, za  $t \rightarrow +\infty$ . Najveći takav skup  $U$  se naziva *bazen atrakcije*.
- $A$  je minimalan: nema pravog podskupa od  $A$  koji zadovoljava uvjete 1 i 2.

Čudni se atraktor može pak definirati kao atraktor na kojem se fazni tok odlikuje samosličnom (fraktalnom) strukturom. Danas je njihovo geometrijsko svojstvo manje bitno nego dinamička svojstva osjetljivosti na početne uvjete. Koriste se i izrazi "kaotični atraktor", te "fraktalni atraktor".

### **Poincare - Bendixsonov teorem**

Diskretni kaotični sustavi, kao npr. logistička mapa, mogu ispoljiti čudne atraktore bez obzira na njihovu dimenzionalnost. Za kontinuirane dinamičke sustave, Poincare - Bendixsonov teorem kaže da se čudni atraktori pokazuju tek na 3 ili više dimenzija. Konačno-dimenzionalni linearni kontinuirani sustavi nisu nikad kaotični. Da bi se to

svojstvo pojavilo, linearni sustav mora biti beskonačno dimenzionalan. Ili sustav mora biti nelinearan.

Teorem:

Neka jednađba (2.1) opisuje glatko vektorsko polje koje djeluje na otvoren skup, koji pak sadrži zatvoren, ograničen skup  $R \subset \mathbb{R}^2$ , a koji je takav da sve trajektorije koje počinju u  $R$ , ostaju u  $R$ . Tada je svaka trajektorija koja počinje u  $R$  ili fiksna točka, ili periodička orbita, ili teži u jednu od njih, pri  $t \rightarrow +\infty$ .

Ovaj teorem pokazuje da kontinuirani dinamički sustavi na euklidskoj ravnini ne mogu biti kaotični za dvije dimenzije.

## 2.4 *Lorenzov model*

Edward Lorenz je 1963. godine modelirao Rayleigh-Benardov eksperiment. Promatra se tok fluida u gravitacijskom polju. Fluid se nalazi između dvije beskonačne ravne plohe, na različitim temperaturama ( $\Delta T$  je razlika temperatura). Donja ploča je toplija, što uzrokuje jače širenje fluida, te se uspostavlja konvekcija toplijeg fluida prema gore, a hladniji (gušći) pada prema dolje.

Da bi se uspostavilo strujanje fluida među pločama, treba savladati viskoznost. Zato pri maloj razlici temperatura među pločama nema strujanja, već samo uniformni toplinski transport. Kako razlika u temperaturi raste, započinje stacionarno strujanje fluida rolanjem (nestabilnost). Na još većim razlikama u temperaturi, strujanje fluida, prolazeći kroz slijed bifurkacija, prelazi u kaotično.

Lorenz je modelirao gore spomenuti eksperiment pomoću jednađbi:

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X), \frac{dY}{dt} = -XZ - Y + rX, \frac{dZ}{dt} = XY - bZ. \quad (2.18)$$

Vrijednosti parametara su  $\sigma=10$  (Prandtlov broj proporcionalan omjeru viskoznosti i termalne vodljivosti fluida),  $b=\frac{8}{3}$  (omjer širine i visine role fluida), dok je  $r \propto \Delta T$  kontrolni parametar.

### 2.4.1 Svojstva Lorenzovog dinamičkog sustava

Iz jednadžbi (2.18) možemo dobiti 3 fiksne točke sustava

$$T_0 : X = Y = Z = 0 \quad (2.19)$$

$$T_{1,2} : X = Y = \pm\sqrt{b(r-1)}, Z = r-1 \quad (2.20)$$

Lineariziramo fazni tok oko fiksne točke  $T_0$  i dobivamo matricu transformacije

$$A_{T_0} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

što daje svojstvene vrijednosti

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1)}, \lambda_3 = -b. \quad (2.22)$$

Lineariziramo sada fazni tok oko fiksnih točaka  $T_{1,2}$  i dobivamo matricu transformacije

$$A_{T_{1,2}} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -c \\ c & c & -b \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

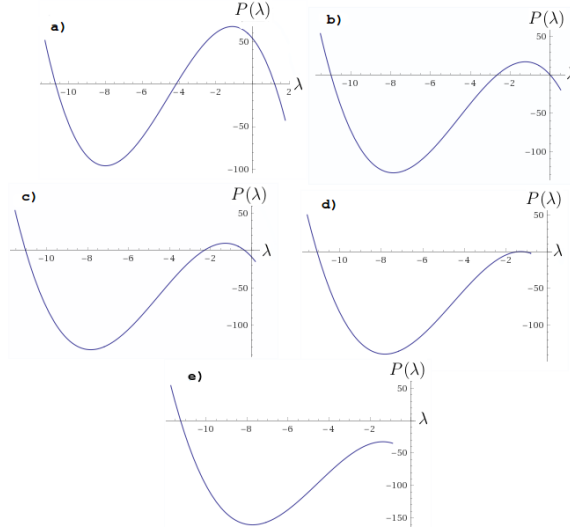
gdje je

$$c = \pm\sqrt{b-1}.$$

Tražimo svojstvene vrijednosti:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & -X \\ Y & X & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

daje 3 svojstvene vrijednosti, a koje mijenjaju vrijednosti kako mijenjamo parametar  $r$ , što se vidi na slici 2.10. Za  $r=1$  reproducira se rezultat iz analize  $A_{T_0}$ , što nam govori da je ta fiksna točka strukturno nestabilna.



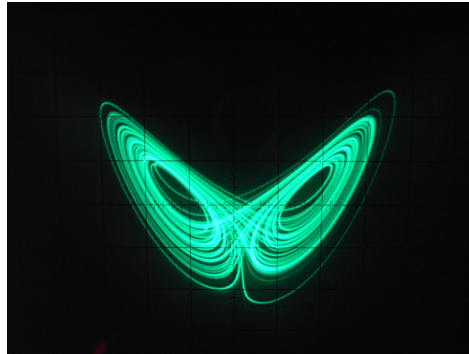
Slika 2.10: Graf zavisnosti svojstvenih vrijednosti  $\lambda$  fiksni točaka  $T_{1,2}$  o promjeni parametra  $r$ : a)  $r < 1$ ; b)  $r = 1$ ; c)  $1 < r < r_1$ ; d)  $r = r_1$ ; e)  $r > r_1$ . Pri crtanju grafova korištene su numeričke vrijednosti: a)  $r = 0$ ; b)  $r = 1$ ; c)  $r = 1.15$ ; d)  $r = 13456$ ; e)  $r = 2$ .

#### 2.4.2 Ulazak u kaotično ponašanje

- Za  $0 < r < 1$ , postoji samo jedna realna nultočka, *stabilna fiksna točka*  $T_0(0,0,0)$ .
- Za  $r = 1$ ,  $T_0$  postaje *nestabilna sedlena točka* i stvaraju se *dva stabilna čvora*  $T_{1,2}$  (pitchfork bifurkacija), a za parametar  $r$  u području  $1 < r < r_1$ , oni se počnu razlučivati (kako parametar  $r$  raste, sve se više razmiču).  $\lambda_{1,2,3} < 0 \in \mathbb{R}$
- Za  $r \geq r_1 \approx 1.3456$ , svojstvene vrijednosti  $\lambda_{2,3}$  postaju *kompleksne*.  $\text{Re}(\lambda_{2,3}) < 0$ , dakle, stabilni čvorovi postaju *stabilni fokusi* koji se i dalje razmiču šireći spirale faznog toka oko sebe.
- Za  $r = r_H \approx 13.96 > r_1$  spirale se dotaknu u sedlenoj fiksnoj točki  $T_0$  u ishodištu. Nastaju dvije homokliničke trajektorije, a uzrok tome je *homoklinička bifurkacija*. U našem slučaju točke  $T_{1,2}$  ostaju stabilni fokusi oko kojih se formiraju nestabilna granična kola, tj. sedlena kola. Sedleno kolo je poseban tip nestabilnog graničnog kola koje se pojavljuje samo u faznim prostorima sa 3 ili više dimenzija. Kolo ima dvodimenzionalni stabilni skup i dvodimenzionalni nestabilni skup oko sebe. Bazeni atrakcije zamjenjuju ciljani atraktor, tj. trajektorije iz okoline  $T_1$  asimptotski padaju u  $T_2$  i obratno.
- Za  $r_H < r < r_c$ , sedlena kola se skupljaju oko svojih stabilnih fokusa, a  $\text{Re}(\lambda_{2,3})$  polako isčezava, kako  $r$  prilazi  $r_c$ .
- Za  $r = r_c \approx 27.74$ , događa se *Hopfova bifurkacija (podkritična)*. Stabilni fokusi apsorbiraju sedlena kola, te prelaze u *sedlene točke* ( $\text{Re}(\lambda_{1,2})$  ovdje isčezne, a  $\lambda_1 < 0$ ).

• Za  $r > r_c$ , kako je Lorenz pokazao, nema više stabilnih graničnih kola. [3] Sedlene točke su nestabilne te bi trebale odbijati trajektorije u beskonačnost. Ali to se ne dogodi, pošto je Lieva derivacija sustava negativna ( $L = -\sigma - b - 1 = -\frac{41}{3}$ ), što upućuje na jako sažimanje faznog prostora. Dakle, trajektorije se evolucijom odbijaju od  $T_1$  i  $T_2$ , te kaotično preskaču s jednog diska kojim orbitiraju na drugi.

Takav atraktor se naziva *čudni (Lorenzov) atraktor* slika 2.11, a ponašanje sustava *kaotično*.



Slika 2.11: Lorenzov čudni atraktor

## 2.5 Diskretna preslikavanja

Diskretna preslikavanja (znana još i kao diferencijske jednadžbe) su preslikavanja koja se temelje na iteracijama. Za razliku od kontinuiranih diferencijalnih jednadžbi, kojima smo se do sad bavili, u diferencijskim jednadžbama evolucija sustava nije kontinuirana, nego se događa u diskretnim koracima. Općeniti oblik takvog diskretnog preslikavanja se može zapisati kao:

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{F}(\vec{X}_n) \quad (2.25)$$

gdje se niz  $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$  naziva *orbita*.

Diskretna preslikavanja se mogu koristiti kao alati za analizu diferencijalnih jednadžbi, kao modeli prirodnih opažanja, kao jednostavni primjeri kaosa, itd.



### 2.5.1 Fiksne točke i njihova stabilnost

Pretpostavimo da u jednodimenzionalnom diskretnom dinamičkom sustavu

$$X_{n+1} = f(X_n) \quad (2.26)$$

$X^*$  zadovoljava  $f(X^*)=X^*$ . Tada je  $X^*$  fiksna točka, tj. orbita ostaje na  $X^*$  za sve buduće iteracije.

Da bi odredili stabilnost, promatramo orbitu blisku fiksnoj točki  $X_n=X^*+\eta_n$ , i zanima nas ponašanje orbite u odnosu na fiksnu točku (približava li se orbita ili udaljava). Supstitucijom i razvojem u Taylorov red, te zanemarivanjem kvadratnih članova u razvoju dobivamo

$$\eta_{n+1} = \frac{df(X^*)}{dx} \eta_n. \quad (2.27)$$

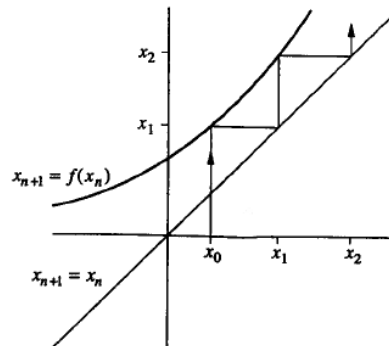
Svojtvena vrijednost jest u ovom slučaju

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=X^*} \quad (2.28)$$

Ako je  $|\lambda|<1$ , fiksna točka je *stabilna*, dok je za  $|\lambda|>1$ , fiksna točka *nestabilna*. U slučaju da je  $|\lambda|=1$ , fiksna točka je *strukturno nestabilna*. Svi ovi rezultati i proces linearizacije su analogni onima kod diferencijalnih jednadžbi.

### 2.5.2 Metoda sukcesivnih slika

Diskretna preslikavanja se mogu prikazati i grafički, kao na slici 2.12.



Slika 2.12: Grafički prikaz diskretnog preslikavanja

Neka je dano preslikavanje pomoću jednadžbe (2.40) i početni uvjet  $X_0$ . Iz početnog uvjeta povučemo vertikalnu liniju do sjecišta sa grafom  $f(x)$ , koje predstavlja rješenje

$X_1$ . Tada se iz sjecišta sa grafom povuče horizontalna linija do sjecišta s identitetom  $X_{n+1}=X_n$ , te se iz te točke opet podigne vertikalna linija do rješenja  $X_2$ . Ako nastavimo proces  $n$  puta, dobimo prvih  $n$  točaka trajektorije.

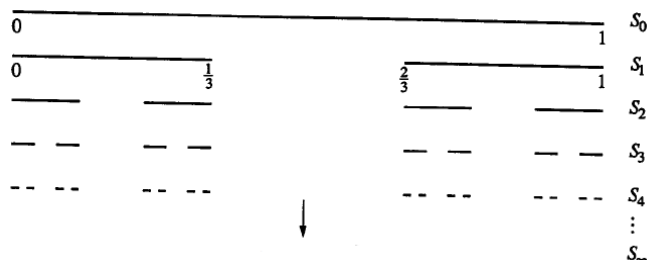
Takav grafički prikaz nam dopušta da jednim pogledom spoznamo globalno ponašanje sustava.

## 2.6 Fraktali

Fraktali su apstraktni objekti koji imaju svojstvo samosličnosti strukture na svim skalama promatranja. [1] Svojstvo samosličnosti je specifično samo za matematički egzaktne fraktale, tj. samoslični objekti se ne mogu pronaći u prirodi. Ako npr. gledamo sve bliže i bliže u list drveta, mijenja se struktura onog što vidimo, eventualno ćemo stići do stanica lista, koji više uopće ne nalikuju na početnu sliku. Ipak, fraktale katkad koristimo za aproksimiranje realnih objekata.

### 2.6.1 Cantorov skup

Slika 2.13 pokazuje konstrukciju Cantorovog skupa, koji je po svojoj strukturi fraktal.



Slika 2.13: Cantorov skup

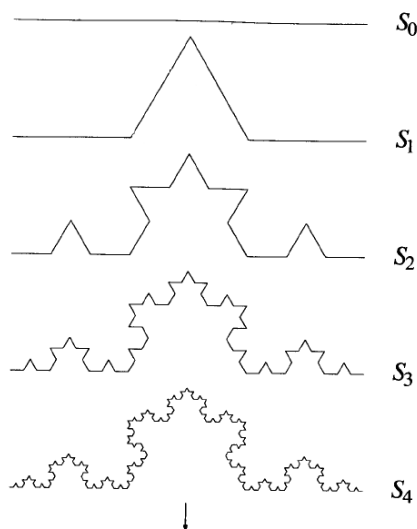
Počinjemo sa zatvorenim intervalom  $S_0=[0,1]$ , te izbrišemo interval  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , ostavljajući rubne točke. Taj postupak stvara dva zatvorena intervala označenih sa  $S_1$ . Sad izbrišemo intervale  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  i  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ , tj. srednje trećine od  $S_1$  da bi stvorili interval  $S_2$ , itd. Granični skup  $C=S_\infty$  se naziva Cantorovim skupom.

Svojstvo Cantorovog skupa, koje se daje primjeniti i na ostalim fraktalima, je da *njegova dimenzija nije cijeli broj*. Potonje svojstvo ćemo detaljnije sagledati.

## 2.6.2 Fraktalna dimenzija

Geometrijska dimenzija nekog skupa točaka je najmanji broj koordinata potreban da se opiše svaka točka u skupu. No, kao što ćemo sad vidjeti, ta definicija nije primjenjiva na fraktale.

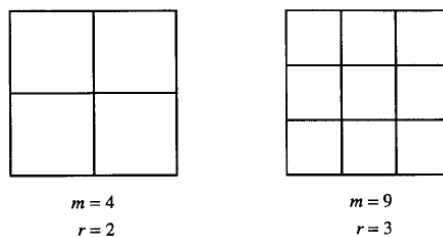
Uzmimo za primjer von Kochovu pahuljicu, samoslični fraktal čije je generiranje prikazano na slici 2.14. Da bi generirali Kochovu pahuljicu, počinjemo sa linijskim seg-



Slika 2.14: von Kochova pahuljica

mentom  $S_0$ .  $S_1$  stvorimo tako da obrišemo srednju trećinu od  $S_0$  te je zamjenimo s dvije stranice jednakostraničnog trokuta koji bi nastao kad bi vratili obrisani segment. Fraktal se generira dalje jednostavnim pravilom: Linijski segment  $S_{n+1}$  nastaje tako da se umjesto  $S_n$  postave druge dvije stranice jednakostraničnog trokuta. Granični skup  $K=S_\infty$  je von Kochova pahuljica.

Dimenzija von Kochove pahuljice ne može biti 1 jer je lučna udaljenost između bilo koje dvije točke na  $K$  beskonačna. No, dimenzija ne može biti niti 2, pošto se ipak radi o linijskom objektu. Za opis ovakvih objekata potrebno je uvesti sofisticiraniju definiciju dimenzije. Pogledajmo kako uvesti "fraktalnu dimenziju". Ako smanjimo veličinu kvadrata za faktor 2 (lijevi kvadrat na slici 2.15), potrebno nam je 4 takva kvadrata da popunimo početni. Ako smanjimo dimenzije kvadrata za faktor 3 (desni kvadrat na slici 2.15), potrebno nam je 9 takvih kvadrata da popunimo početni. Zamislamo sad kocku kojoj reduciramo dimenzije. Ako se svaka stranica skрати za faktor 2, potrebno je 8 kocaka reducirane dimenzije da popune volumen početne. Dakle, omjer broja



Slika 2.15: Kvadrati popunjeni sa  $m$  kvadrata, dimenzija reduciranim za faktor  $r$ .

struktura reducirane veličine  $m$  za faktor  $r$ , koji je potreban da popuni objekt prvotne veličine je kod 2D objekata (npr. kvadrat)  $\frac{r}{m} = \frac{r}{r^2}$ , dok je slučaj kod 3D objekata (npr. kocka)  $\frac{r}{m} = \frac{r}{r^3}$ .

Pretpostavimo da se samoslični skup (fraktal) sastoji od  $m$  kopija samog sebe, smanjenog za faktor  $r$ . Analogno prethodnim primjerima, uočavamo da vrijedi

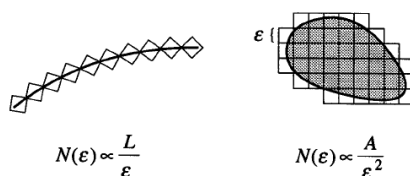
$$m = r^d. \quad (2.29)$$

Tada možemo definirati dimenziju skupa kao

$$d = \frac{\log m}{\log r}. \quad (2.30)$$

## 2.7 Hausdorff - Besicovicheva i "Box-counting" dimenzija

Računalom generirani fraktali obično su konačni i ne idu do beskonačne skale samosličnosti, a ne znamo niti preslikavanje koje ga generira. Zato koristimo aproksimativnu, "Box-counting" metodu, koja je primjenjiva na aproksimativne fraktale. Neka



Slika 2.16: Fraktali prekriveni generaliziranim kockama stranice  $\epsilon$ .

je  $S$  podskup  $D$ -dimenzionalnog Euklidskog prostora, i neka je  $N(\epsilon)$  minimalni broj  $D$ -dimenzionalnih kockica stranice  $\epsilon$  potrebnih da se pokrije  $S$ . Na slici 2.16 možemo

vidjeti kakva je situacija za  $D=1$  i  $D=2$ . Generalno, vrijedi

$$N(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon^d}. \quad (2.31)$$

Jednadžba 2.31 vrijedi za većinu fraktalnih skupova  $S$ , samo tamo  $d$  više nije cijeli broj. "Box-counting" dimenzija je definirana kao

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \quad (2.32)$$

Slično se pronalazi i Hausdorf-Besicovicheva dimenzija, samo tamo umjesto kocki uzimamo  $N(\epsilon)$  malih  $D$ -dimenzionalnih kugli radijusa  $\epsilon$  i pokrivamo njime cijeli fraktalni objekt. Hausdorf - Besicovicheva dimenzija se također može definirati pomoću jednadžbe (2.32). U tom smislu dimenzija Cantorovog skupa je  $d \approx 0.639$ , a Kochove pahuljice  $d \approx 1.2619$ .

## 2.8 Sustavi iteracijskih funkcija (IFS)

Sustavi iteracijskih funkcija su jednostavni alati za konstrukciju fraktala kroz serije (najčešće) kontraktivnih linearnih transformacija. Metodu je razvio M.F.Barnsley 1985. godine.

IFS također služi kao temelj za neke metode komprimiranja podataka. Pogotovo su uspješni kod komprimiranja slika, zato što se optički uzorci mogu vrlo dobro aproksimirati IFS-om. Umjesto zapisa cijele slike, zapišu se samo kodovi za linearne transformacije iz kojih se kasnije rekonstruira slika.

### 2.8.1 Kontraktivne linearne transformacije

Na primjeru u dvije dimezije, linearna transformacija na točku  $(x,y)$  na ravnini se može prikazati kao

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Koeficijenti  $a, b, c, d$  opisuju rotaciju i homotetiju, dok  $e$  i  $f$  opisuju translaciju koordinata  $(x, y)$ . Kompozicijom istih možemo izvršiti različite operacije.

Npr, ako  $b$  i  $c$  pridijelimo vrijednost 0, a i  $d$  množe koordinate  $(x$  i  $y)$  točaka, te time mogu proširiti ili sažeti neku figuru po te dvije osi (homotetija). Možemo i kreirati

simetriju u odnosu na horizontalnu/vertikalnu koordinatnu os, ako jedan ili oba  $(a, b)$  koeficijenta učinimo negativnima. Ako pak iščeznu  $a$  i  $d$  koeficijenti, tada množenjem sa  $b$  i  $c$  možemo zamjeniti horizontalne i vertikalne koordinate. Ako postavimo za  $a = \cos(\phi)$ ,  $b = -\sin(\phi)$ ,  $c = \sin(\phi)$ ,  $d = \cos(\phi)$ , imamo rotaciju za kut  $\phi$ .

Još valja napomenuti da su linearne transformacije koje IFS koristi kontraktivne ako su  $0 \leq (a, b, c, d) < 1$ .

## 2.8.2 Deterministički i nedeterministički IFS algoritmi

Dakle, IFS su skupovi  $n \in \mathbb{N}$  (najčešće) kontraktivnih linearnih transformacija po kojima se konstruiraju algoritmi za generiranje fraktala. Danas su u uporabi deterministički i nedeterministički IFS algoritmi.

*Deterministički algoritam* uzima skup točaka, koji može sačinjavati bilo koju geometrijsku figuru, i primjenjuje na nju svaku od  $n$  linearnih transformacija sustava, tako da dobijemo  $n$  skupova transformiranih točaka. Na svaki od njih ponovo primjenimo tih  $n$  linearnih transformacija, što nam daje  $n^2$  novih skupova. Nastavljamo sa iteriranjem rezultata sve dok se unija svih skupova dobivenih u zadnjoj transformaciji ne približi dovoljno strukturi koja predstavlja atraktor sustava. Transformacijama uvijek stignemo do tog atraktora, bez obzira na početni skup točaka. Svaki IFS ima karakteristični samoslični atraktor, fraktal, pošto je sazdan od sve manjih i manjih kopija samog sebe.

*Nedeterministički algoritam* radi na sličnom principu, ali umjesto da primjenimo transformacije na skup točaka, primjenjujemo ih na jednu točku, prikazujući (crtajući) rezultat svaki put. Ovdje pridjeljujemo neku vjerojatnost svakoj od linearnih transformacija sustava, s time da suma svih tih vjerojatnosti mora dati 1. U svakoj iteraciji algoritma odaberemo jednu od tih transformacija npr. generatorom slučajnih brojeva. Prve točke nastale iteracijama se odbacuju, pošto su najčešće dosta udaljene od atraktora, dok se ostale crtaju (od 1000 do 5000 iteracija u najviše slučajeva) dok nije željena "popunjenost" fraktala dobivena.

Deterministički IFS je nešto teže implementirati nego nedeterministički, s obzirom na to da se skup točaka svakom novom iteracijom povećava, pa osim konačne memorije

računala, problem bi mogao biti i vrijeme trajanja iteracije nakon 50-ak njih. Tamo gdje vjerojatnosti (tj. "težine") transformacija nisu poznate, smisleno izračunati iste i implementirati nedeterministički algoritam za dani fraktal.

Neka su  $r_i$  kontrakcije pojedinih transformacija IFS-a. Po Moranovom zakonu [4] vrijedi

$$\sum_{i=1}^n (r_i)^d = 1 \quad (2.34)$$

gdje je "d" dimenzija samosličnosti fraktala. Nakon što istu dobijemo iz gore spomenutog izraza, možemo računati vjerojatnosti (težine) transformacija po izrazu

$$p_i = (r_i)^d. \quad (2.35)$$

## 3 Neki glazbeni termini

[5]

### 3.1 *Tempo*

Tempo označava brzinu izvođenja nekog djela, a jedinica je u [BPM] (Beats Per Minute). U kompozicijskom algoritmu, tempo ima malo drugačije značenje, pošto je brzina izvođenja stalna, a trajanje tona se produžuje ili skraćuje.

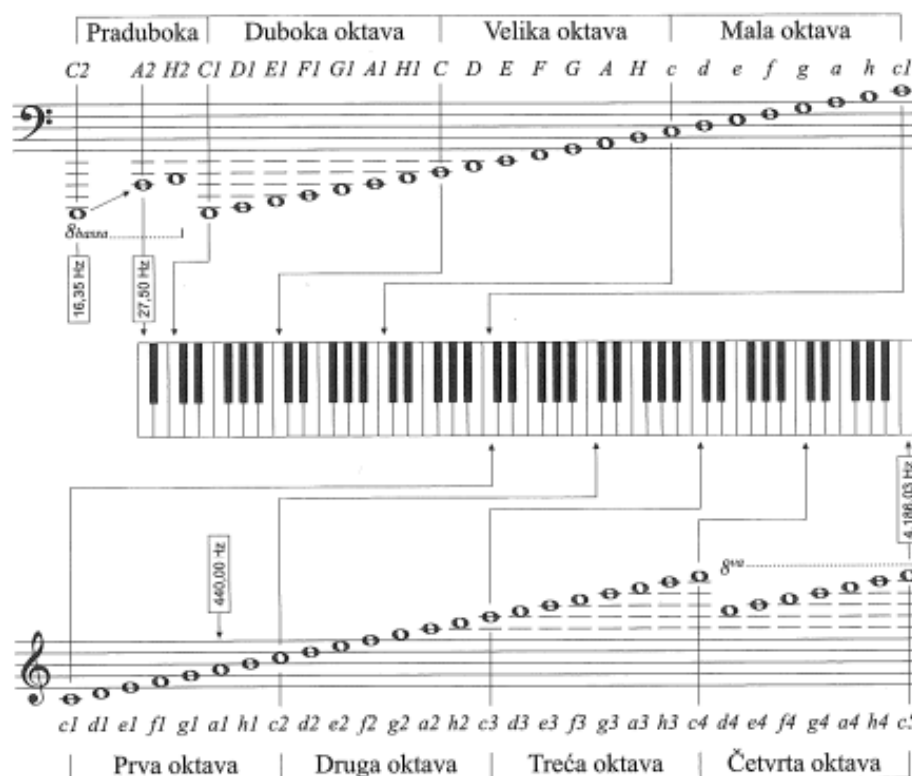
### 3.2 *Visina tona*

Visina tona se označava položajem u glazbenom crtovlju, a ton određene visine nosi i određeni naziv. Na slici 3.17 se vidi veza između naziva visine tona i položaja u glazbenom crtovlju.

No, i visine tih tonova se mogu mijenjati, postavljajući znakove alteracija. Oni se nazivaju povisilica (#) (povisuje označeni ton za interval pola stupnja) i snizilica (b) (snizuje označeni ton za interval pola stupnja).

### 3.3 *Interval*

Interval među tonovima je razlika u visinama dvaju tonova. Ta je razlika diskretizirana (u klasičnoj teoriji glazbe) i najmanji iznos se naziva interval *polustupanj*. Dva



Slika 3.17: Naziv visine tona vezano uz crtovlje.

polustupnja čine *cijeli stupanj*. Tri polustupnja čine *cijeli i pol stupanj*, itd. Za nas je ovdje bitno poznavati intervale od *čiste prime* (nema razlike među visinama dvaju tonova) i *čiste oktave*, gdje se ton nalazi za 12 polustupnjeva više/nije od tona s kojim se uspoređuje. Sekunda, terca, seksta i septima mogu biti *mali* ili *veliki* intervali, dok prima, kvarta, kvinta i oktava mogu biti *čisti*,  *smanjeni* ili *uvećani*. U glazbenom djelu, ti intervali mogu ostati stajati neko vrijeme samostalno (konsonantni) ili teže razriješenju (disonantni). Disoantni intervali stvaraju "napetost" (u smislu harmonije), te ih je nakon nekog vremena razvoja potrebno razriješiti. Slijedi popis intervala i koliko polustupanjskih pomaka više/nije od osnovnog tona sadrže:

*Čista prima* - 0 polustupanjskih pomaka

*Povećana prima* / *Mala sekunda* - 1 polustupanjski pomak

*Velika sekunda* - 2 polustupanjska pomaka

*Mala terca* - 3 polustupanjska pomaka

*Velika terca* / *smanjena kvarta* - 4 polustupanjska pomaka

*Čista kvarta* - 5 polustupanjskih pomaka

*Povećana kvarta* / *Smanjena kvinta* - 6 polustupanjskih pomaka

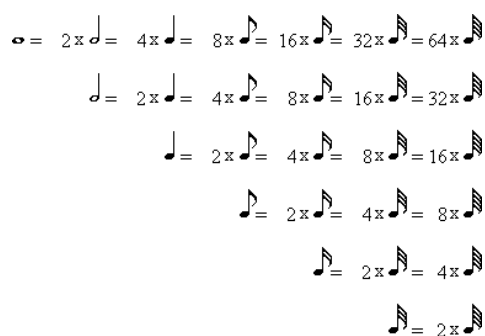


*Čista kvinta* - 7 polustupanjskih pomaka  
*Povećana kvinta / Mala seksta* - 8 polustupanjskih pomaka  
*Velika seksta* - 9 polustupanjskih pomaka  
*Mala septima* - 10 polustupanjskih pomaka  
*Velika septima* - 11 polustupanjskih pomaka  
*Čista oktava* - 12 polustupanjskih pomaka

Valja napomenuti za interval povećane kvarte / smanjene kvinte (tritonus) da su ga u srednjem vijeku kompozitori izbjegavali. Naime, to je jako disonantan interval, te obavezno teži razriješenju u konsonantni. Zbog tog svojstva, da gdje se pojavi više nema daljnjeg razvoja, zvali su ga "đavao u glazbi".

### 3.4 Trajanje tona

Svaki ton ima i neko određeno trajanje. Ono se označava različitim oblicima nota, koji se mogu vidjeti na slici 3.18. U prvom redu slike, od lijeva na desno, notni oblici imaju nazive: cijela nota (nota brevis), polovinka, četvrtinka, osminka, šesnaestinka, tridesetdruginka, šezdesetčetvrtinka.



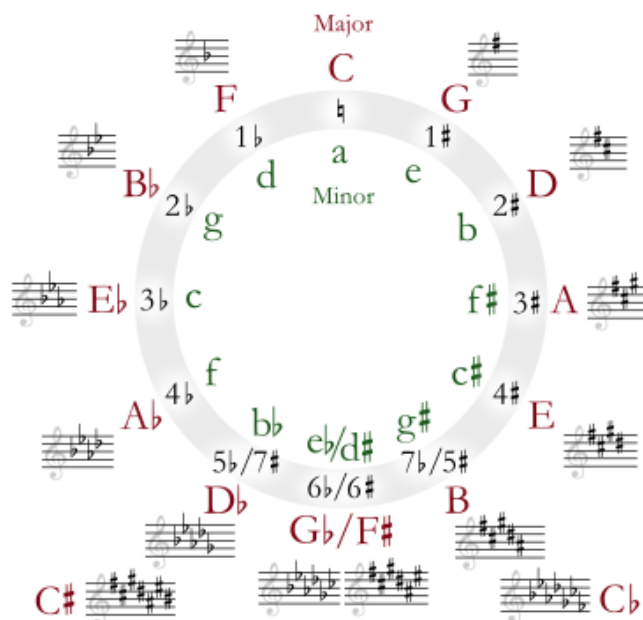
Slika 3.18: Notni oblici trajanja tona sa međusobnim odnosima.

### 3.5 Dinamika

Dinamika označava jačinu zvuka pri izvođenju nekog djela. Ona može biti promjenjiva, te se time mogu naglasiti neki određeni dijelovi. Na slici 4.2 u sljedećem poglavlju se mogu vidjeti neke vrijednosti, koje se koriste kao oznake, i opis jačine tona uz njih.

### 3.6 Kvintni krug

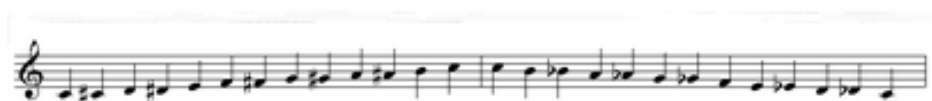
Kvintni krug prikazuje durske i pripadne molske tonalitete, poredane u krug po njihovim tonikama (početni ton), udaljene za interval kvinte (slika 3.19).



Slika 3.19: Kvintni krug: velikim slovima označeni su durski, malim slovima molski tonaliteti. Na samom krugu je oznaka koliko povisilica/snizilica u predznaku svaki tonalitet ima.

### 3.7 Ljestvica

Ljestvica je bilo koji skup glazbenih tonova, poredanih po visini. Ako visina poredanih tonova raste, tada se radi o uzlaznoj ljestvici, u suprotnom se radi o silaznoj ljestvici. U većini slučajeva ljestvice se ponašaju jednako pri uzlaženju/silaženju, ali negdje i nije to slučaj (melodijska mol ljestvica). Za ljestvicu obično vrijedi da zahvaća intervalni raspon od jedne oktave, koja je podijeljena (u klasičnoj glazbenoj teoriji, koja je korištena u kompozicijskom algoritmu) na polustupanjske intervale - kromatska ljestvica (slika 3.20). Ako pak na mjesta tih polustupanjskih intervala kromatske ljestvice



Slika 3.20: Primjer kromatske ljestvice.

postavimo neke druge određene intervale, dobivamo ljestvice koje se nešto češće koriste

u glazbi.

Npr, *durska ljestvica* ima polustupanjske intervale na III. i VII. stupnju, te cijelostupanjske intervale na I., II., IV., V. i VI. stupnju uzlazne i silazne ljestvice.

*Molska (prirodna) ljestvica* ima polustupanjske intervale na II. i V. stupnju, te cijelostupanjske intervale na I., III., IV., VI. i VII. stupnju uzlazne i silazne ljestvice.

*Molska (harmonijska) ljestvica* ima polustupanjske intervale na II., V. i VII. stupnju, cijelostupanjske intervale na I., III. i IV. stupnju, dok se na VII. stupnju nalazi jedan i pol stupanjski interval uzlazne i silazne ljestvice.

*Molska (melodijska) ljestvica* se razlikuje po strukturi u uzlaznom i silaznom modu. U uzlaznom ima polustupanjske intervale na II. i VII. stupnju, te cijelostupanjske intervale na I., III., IV., V. i VI. stupnju. U silaznom se ponaša kao prirodna molska ljestvica.

Osim položajima intervala, ljestvica se definira i svojim početnim tonom. Taj se ton nalazi na I. stupnju ljestvice i naziva se *tonika*. Npr, ako bi ljestvica imala početni ton A, te daljnje tonove poredane po pravilu za generiranje durske ljestvice, dobili bi A dur ljestvicu, a za kompoziciju koju bi iskomponirali u njoj (uz moguće alteracije pokojeg tona) bi rekli da je u A dur tonalitetu. Alteracije napisane odmah iza notnog ključa nazivaju se *predznaci*. Na slici 3.21 su prikazani predznaci za pojedine durske tonalitete, a u zagradama se nalaze imena molskih tonaliteta, koji imaju istu strukturu kao i pripadni durski. Takav par naziva se *paralelnim tonalitetima*.



Slika 3.21: Predznaci za određene tonalitete, poslagani u kvintnom krugu.

Na stupnjevima ljestvica se grade *akordi* (suzvuci). Oni daju svrhu postojanju tonaliteta. Nama je bitno ovdje razlikovati *kvintakorde*. To su akordi koji se sastoje od 3 tona.

Ako je u pitanju *durski kvintakord*, prvi ton je čista prima u odnosu na stupanj ljestvice

na kojem se gradi, drugi ton je velika terca u odnosu na početni ton, dok je treći ton čista kvinta u odnosu na početni.

*Molski kvintakord* gradi prvi ton i treći ton kao i kod durskog, s time da je drugi ton mala terca u odnosu na početni ton.

*Smanjeni kvintakord* gradi prvi i drugi ton kao i kod molskog, s time da je treći ton pola stupnja niži nego kod molskog kvintakorda, dakle interval smanjene kvinte na početni ton. Obrati kvintakorda se nazivaju *sextakord* (početni ton se prebaci za interval oktave gore), i *kvartsextakord* (početni i drugi ton se prebace za oktavu gore). Ako bi prebacili i treći ton, dobijemo početni oblik.

Osim već spomenute tonike, za opis tonaliteta su bitni i akordi (kvintakordi ovdje) koji se grade na IV i V. stupnju. Ti stupnjevi se nazivaju *subdominanta* i *dominanta*. Akordi koji se grade na ta tri stupnja u osnovi definiraju tonalitet.

## 4 Kompozicijski i varijacijski algoritmi te alati za analizu

Cilj ovog poglavlja je opisati algoritam koji je korišten za glazbenu kompoziciju pomoću nedeterminističkog IFS-a (kodovi za generiranje pojedinog atraktora se nalaze u dodatku A), te algoritam koji je korišten za glazbene varijacije na već zadanu temu pomoću Lorenzovog atraktora.

### 4.1 Kompozicijski algoritam

Kompozicijski algoritam koristi rješenja  $(x(t), y(t))$  iteracijskog razvoja IFS-a za generiranje glazbe. Pomoću njih se kontrolira *visina tona (frekvencija)*, *dužina trajanja tona (u sekundama i beatovima)*, te *dinamika (jačina zvuka)*. Bilo koja komponenta rješenja se može upotrijebiti za kontrolu bilo kojeg od spomenutih svojstava.

Algoritam, da bi mogao raditi, treba sljedeće vrijednosti:

- 1) Komponentu rješenja koja će kontrolirati visinu tona.
- 2) Komponentu rješenja koja će kontrolirati dužinu trajanja tona.
- 3) Komponentu rješenja koja će kontrolirati jačinu zvuka.
- 4) Broj algoritamskih iteracija IFS-a  $n$ , gdje je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < n \leq 50000$ .

- 5) Tempo izvođenja skladbe  $bpm$ , gdje je  $bpm \in \mathbb{N}$ ,  $0 < bpm \leq 240$ .
- 6) Ukupni broj oktava  $k$  kroz koje se prožima glazbena ljestvica, gdje je  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < k \leq 7$ .
- 7) Oktavu  $o$  na kojoj se nalazi tonika, gdje je  $o \in \mathbb{N}$ ,  $0 < o \leq k$ .
- 8) Polustupanj  $T$  oktave  $o$  na kojem se nalazi tonika, gdje je  $T \in \mathbb{N}$ ,  $0 < T \leq 12$ .
- 9) Broj polustupanjskih intervala  $s$  u ljestvici, gdje je  $s \in \mathbb{N}$ . Najveći broj polustupanjskih intervala ovisi o vrijednostima 6), 7) i 8), uz uvjet da ne može biti veći od 12.
- 10) Broj cjelostupanjskih intervala  $t$  u ljestvici, gdje je  $t \in \mathbb{N}$ . Najveći broj cjelostupanjskih intervala zavisi o vrijednostima 6), 7), 8) i 9), uz uvjet da ne može biti veći od 6.
- 11) Broj cjelo i polustupanjskih intervala  $tm$  u ljestvici, gdje je  $tm \in \mathbb{N}$ . Najveći broj cjelo i polustupanjskih intervala ovisi o vrijednostima 6), 7), 8), 9) i 10), uz uvjet da ne može biti veći od 4.
- 12) Položaji polustupanjskih intervala  $sp$  u ljestvici, gdje je  $sp \in \mathbb{N}$ .
- 13) Položaji cijelostupanjskih intervala  $tp$  u ljestvici, gdje je  $tp \in \mathbb{N}$ .
- 14) Položaji cjelo i polustupanskih intervala  $tmp$  u ljestvici, gdje je  $tmp \in \mathbb{N}$ .

Dodatno (nije nužno) se može skalirati rješenja IFS modela (IFSsc) prije ulaska u algoritam. Naime, time se može mijenjati "stil" kompozicije. Uglavnom, pri manjim vrijednostima multiplikativnog faktora nastaju življe melodije (á la elektronska glazba), dok su pri većim melodije mirnije (neka vrsta jazza), uz tu i tamo koje brže sekvence. Parametar promjenom utječe i na algoritamski izbor dijela naše definirane ljestvice visinom tona (to nije detaljnije istraživano), te na trajanje tona i dinamiku (ne u tolikom opsegu).

Vrijednosti pod brojevima (6-14) su potrebne da bi definirali glazbenu ljestvicu, preko koje će algoritam komponirati.

Vrijednosti (12-14) nam govore kako izgleda konstrukcija ljestvice, tj. kako su poređani pojedini intervali. Ne mogu se postavljati na mjesta koja su već zauzeta drugim intervalima.

#### 4.1.1 Generiranje frekvencija i glazbenih tonova

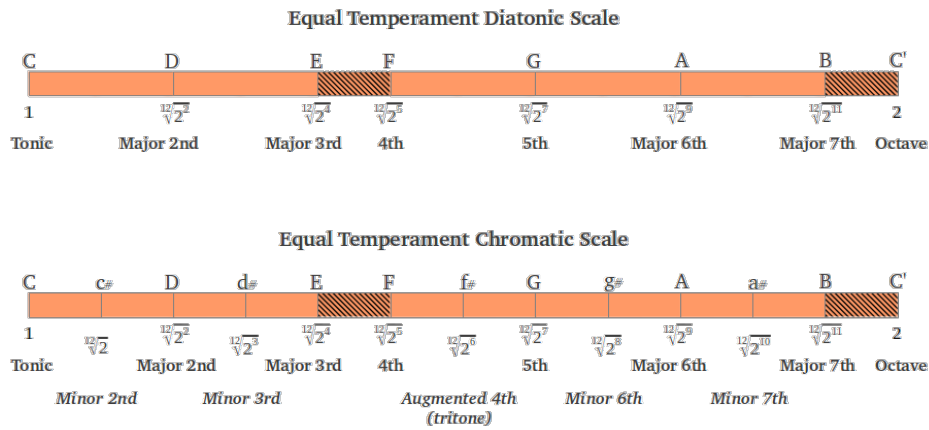
[6]

## Generiranje glazbene ljestvice

Znajući ukupni broj oktava  $k$ , moguće je konstruirati vektor  $\vec{S}$ . On sadrži omjere među frekvencijama kromatske ljestvice (tonike i ostalih tonova, generiranih pomoću geometrijskog reda), koja sadrži  $p=12k$  tonova

$$S_i = 2^{i/12}, 0 \leq i < (p+1). \quad (4.1)$$

Dakle, spomenuti vektor ima  $p+1$  komponenti (na kraju zadnje oktave dodaje se jedan ton da bi se mogao i na njoj definirati interval čiste oktave na tonici). Sada je pomoću



Slika 4.1: Frekvencijski omjeri kromatske ljestvice određeni geometrijskim redom.

vrijednosti (9-14) opisanih u potpoglavlju 4.1. nužno generirati vektor  $\vec{V}$ . Kao i vektor  $\vec{S}$ , on ima  $p+1$  komponenti, koje sadrže brojeve 0 ili 1. Naime, vektor  $\vec{V}$  djeluje kao filter na vektor  $\vec{S}$ , uzimajući samo one frekvencijske omjere, koji se nalaze u ljestvici, a koju smo definirali postavljajući intervale na željena mjesta. Filtrirajući vektor  $\vec{S}$ , dobijemo vektor  $\vec{E}$  s komponentama

$$E_i = V_i * S_i, 0 \leq i < (p+1). \quad (4.2)$$

Potrebno je sad izbaciti prazne komponente (0) vektora  $\vec{E}$ . Time kreiramo vektor  $\vec{E}_1$ , s brojem komponenti  $n \leq (p+1)$ , te tako dobijemo samo frekvencijske omjere koji opisuju tonove (intervale) koji se nalaze u našoj ljestvici. Dakle,

$$\vec{E}_1 = \{E_i | E_i \neq 0, \forall i\} \quad (4.3)$$

nakon čega nam još preostaje normalizacija tog vektora preko najniže vrijednosti (tako

da nova najniža vrijednost bude 1).

### **Normalizacija rješenja IFS modela**

Uzmimo da frekvenciju (visinu) tonova u kompoziciji kontrolira  $x(t)$ , neki odabrani dio komponente rješenja IFS-a. Potrebno je vrijednosti  $x(t)$  normalizirati u odnosu na vektor  $\vec{E}_1$ , a taj proces se sastoji od skaliranja i translacije komponente rješenja  $x(t)$  prema vrijednostima komponenti već spomenutog vektora. Normaliziranu varijablu nazovimo  $x_1(t)$ .

Normalizacija se definira kao

$$|x_1(t)| = \alpha * x(t) + \beta \quad (4.4)$$

gdje je faktor skaliranja

$$\alpha = \frac{(\max(E_1) - 1)}{\max(x(t)) - \min(x(t))}, \quad (4.5)$$

a minimalna vrijednost od  $E_1$  se može zamijeniti sa 1, tj.  $\min(E_1) \equiv 1$ .  $\beta$  pak u izrazu (4.4) označava faktor translacije,

$$\beta = -\alpha * \min(x(t)) + \min(E_1) = -\alpha * \min(x(t)) + 1. \quad (4.6)$$

### **Preslikavanje na najbliže vrijednosti**

Svakoj vrijednosti od  $x_1(t)$  nužno je pridijeliti najbližu odgovarajuću vrijednost komponenti vektora  $\vec{E}_1$ . Nakon toga, generiramo matricu D dimenzija  $a \times n$  po izrazu (4.7), sa indeksima  $0 < i \leq a$ , i  $0 < j \leq n$  gdje  $a$  predstavlja broj elemenata  $x_1(t)$ , a  $n$  broj glazbenih nota.

$$D_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{ako } |x_{1i}(t) - E_{1j}| \leq \mu \\ x_{1j}(t), & \text{ako } |x_{1i}(t) - E_{1j}| > \mu, \end{cases} \quad (4.7)$$

pri čemu je granična vrijednost

$$\mu = 2^{\lambda/6} - 1 \quad (4.8)$$

određena pomoću načina na koji je ljestvica temperirana<sup>1</sup>. U našem slučaju, to je pomoću polustupnjevskih intervala, pa je  $\lambda=0.5$ .

Nadalje, potrebno je generirati novi vektor  $\vec{L}$ , dimenzije  $a$ , koji čuva položaje najmanje

---

<sup>1</sup>Ljestvica je temperirana pomoću najmanjeg intervala. U našem slučaju, to je polustupanj

vrijednosti u svakom retku matrice D. Položaj najmanje vrijednosti u retku matrice, što se da lako uočiti ako pogledamo izraz (4.7), govori nam gdje se koji član ažuriranog  $x_1(t)$  najviše "približio" kojoj komponenti vektora  $\vec{E}_1$ , tj. koju njegovu komponentu iskoristiti za generiranje sljedećeg tona pripadne visine.

No, da bi stvarno generirali ton visine koja odgovara IFS ulaznom "signalu", potrebna nam je *frekvencija tonike*, definirana kao

$$f_{T,o} = 55 * 2^{(T+12o-10)/12}. \quad (4.9)$$

Tek sad, pomoću vrijednosti komponenti "pozicijskog" vektora i frekvencije tonike  $T$ , možemo izračunati frekvencije generiranih tonova pomoću izraza

$$F_i = f_{T,o} * E_{1Li}, 0 < i \leq a. \quad (4.10)$$

Da bismo čuli kako ta naša kompozicija zvuči, potrebno je frekvencije generiranih tonova pretvoriti u MIDI <sup>1</sup> vrijednosti. To se radi po izrazu

$$X_i = 57 + \frac{12}{\ln 2} * \ln \frac{|F_i|}{(440)}, \quad (4.11)$$

gdje  $X_i$  označava komponente vektora  $\vec{X}$ , u koji su onda spremljene visine tonova generiranih pomoću IFS-a.

#### 4.1.2 Generiranje ritmičkih vrijednosti trajanja tonova

Uzmimo ovdje da ritmičke vrijednosti u vremenskim jedinicama predstavlja odabrani dio komponente rješenja  $y(t)$ .

Proces normalizacije je isti kao i u prethodnom podpoglavlju, samo je  $x(t)$  zamijenjen sa  $y(t)$ ,  $x_1(t)$  sa  $y_1(t)$  i vektor  $\vec{E}_1$  zamijenjen sa  $\vec{R}$ , vektorom čije komponente sadrže vrijednosti  $[0,1,2,3,4,5,6]$ . Te vrijednosti predstavljaju glazbene ritmičke figure, gdje 0 predstavlja 64-inku, 1 predstavlja 32-inku... i 6 predstavlja cijelu notu.

Ovdje *floor* funkcija, koja realni broj mapira na najveći cijeli broj koji je manji ili jednak tom realnom broju, može sasvim dobro poslužiti za mapiranje  $y_1(t)$  na ritmičke

---

<sup>1</sup>Skraćeno za Musical Instrument Digital Interface, MIDI je protokol predstavljen 1981. godine, koji služi za povezivanje elektroničkih glazbenih instrumenata. Jedna MIDI veza može nositi informacije za do 16 kanala, od kojih svaki može biti usmjeren ka drugom elektroničkom uređaju. Osim informacije o kojem se kanalu radi, nosi i podatke o visini i trajanju tona, tempu i dinamici.



vrijednosti. Te mapirane ritmičke vrijednosti rezultiraju vektorom  $\vec{Y}_1$ .

### 4.1.3 Dinamičke vrijednosti tonova

Pretpostavimo da komponenta rješenja  $x(t)$  kontrolira i jačinu (dinamiku) tona. Procedura za dobivanje MIDI dinamike je ista kao i u podpoglavlju 4.1, osim što vektor  $\vec{U}$  (čije komponente sadrže vrijednosti 10, 30, 45, 60, 75, 92, 108, 127) zamjenjuje vektor  $\vec{E}_1$ . Ti brojevi označavaju vršne vrijednosti dinamičkih intervala, po slici 4.2. Nakon normalizacije potrebno je kreirati vektor  $\vec{L}$ , ali ovdje je, za razliku od procesa

Velocity value	Name	Symbol
109–127	Fortississimo	<i>fff</i>
93–108	Fortissimo	<i>ff</i>
76–92	Forte	<i>f</i>
61–75	Mezzo forte	<i>mf</i>
46–60	Mezzo piano	<i>mp</i>
31–45	Piano	<i>p</i>
11–30	Pianissimo	<i>pp</i>
0–10	Pianississimo	<i>ppp</i>

Slika 4.2: Rubne vrijednosti intervala koji odgovaraju oznakama za dinamiku.

pri određivanju visine tona, granični parametar  $\mu=10$ . Komponente vektora, koje nam daju dinamičke oznake koje MIDI sustav prepoznaje kao mjere jačine tona se računaju po izrazu

$$Z_i = U_{Li}, 0 < i \leq a \quad (4.12)$$

gdje  $U_{Li}$  označava komponentu vektora  $\vec{U}$ , a  $Li$  označava vrijednost komponente  $i$  vektora  $\vec{L}$  te  $a$  označava broj vrijednosti u odabranom dijelu rješenja IFS-a, u ovom slučaju,  $x$  komponente.

## 4.2 Varijacijski algoritam

Varijacijski algoritam koristi podatke iz MIDI zapisa već gotove kompozicije, te ih pomoću Lorenzovog čudnog atraktora alterira. Rezultat je spremljen u novu MIDI datoteku. Za razliku od kompozicijskog algoritma, ovdje je "jačinu" varijacije moguće kontrolirati parametrom. U mojoj verziji alterirana je samo visina tona, a za to se može koristiti komponenta rješenja Lorenzovog atraktora po želji.

Da bi algoritam radio, potrebno je unijeti sljedeće vrijednosti:

- 1) Kontrolni parametar Lorenzovog modela  $r$ , gdje je  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ .
- 2) Komponentu rješenja Lorenzovog modela koja će kontrolirati varijacije.
- 3) Početne uvjete za referentnu trajektoriju, gdje je  $(x_0, y_0, z_0)$  trojka realnih brojeva.
- 4) Početne (po volji bliske referentnim) uvjete za varijacijsku trajektoriju, gdje je  $(x_1, y_1, z_1)$  trojka realnih brojeva.
- 5) Broj algoritamskih iteracija Lorenzovog modela  $n$  (diskretna aproksimacija), gdje je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < n \leq 50000$ .
- 6) Parametar koji određuje "jačinu" varijacijskog utjecaja  $d$ , gdje je  $d \in \mathbb{R}$ ,  $d > 0$ .

#### 4.2.1 Proces variranja visine tona originalne kompozicije

Pogledajmo segment referentne trajektorije (skup rješenja npr.  $x$  komponente), te neka  $x_i$  označava  $i$ -tu njezinu vrijednost.

Vrijednosti  $x_i$  se pridružuju, svaka jednoj od MIDI vrijednosti  $p_i$  za visinu tona originalne kompozicije, sve dok svaki  $p_i$  nema svog para. Neka sada iniciramo varijacijsku trajektoriju sa proizvoljno bliskim početnim uvjetima referentne trajektorije, te također svakoj vrijednosti  $p_{1i}$  (gdje je  $p_{1i}=p_i$ ) pridružimo vrijednost  $x_{1i}$ .

Usporedimo sad svaku vrijednost komponente rješenja varijacijske trajektorije sa vrijednostima komponente rješenja referentne trajektorije. Ako vrijedi da je

$$x_i - x_{1j} < d; i, j = 1..n, \quad (4.13)$$

tada  $p_{1i}$ , koji je pridružen  $X_{1j}$ , mijenja  $p_i$  na mjestu koje je bilo pridruženo  $x_i$ . Nakon što se usporede sve komponente obaju vektora, nastaje novi niz  $p_i$ , tj. nova kompozicija.

### 4.3 Objektivna melodijska analiza

#### 4.3.1 Raznolikost tonskih visina u kompoziciji

Ova veličina mjeri koliko je kompozicija "raspršena", tj. koliki je udio različitih tonova u istoj. Definira se kao

$$V_t = \frac{\eta_d}{n}, \quad (4.14)$$

gdje je  $\eta_d$  broj različitih visina tonova, a  $n$  je ukupni broj tonova u melodiji.

### 4.3.2 Krumhansl-Schmucklerova (K-S) metoda određivanja tonaliteta u kompoziciji

K-S metoda računa korelacijski koeficijent

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (4.15)$$

gdje u  $\{x_i\}$  ulaze profili za svaki durski i molski tonalitet (slika 4.3), dok u  $\{y_i\}$  ulazi trajanje tonova u kompoziciji po jedinicama Orgmaker-a. [8] Algoritam zapravo ispituje

major profile											
do	do#	re	re#	mi	fa	fa#	so	so#	la	la#	ti
6.35	2.23	3.48	2.33	4.38	4.09	2.52	5.19	2.39	3.66	2.29	2.88

minor profile											
la	la#	ti	do	do#	re	re#	mi	fa	fa#	so	so#
6.33	2.68	3.52	5.38	2.60	3.53	2.54	4.75	3.98	2.69	3.34	3.17

Slika 4.3: Profili za sve durske i molske tonalitete

R za svaku moguću kombinaciju profila tonaliteta sa trajanjem tonova u kompoziciji. Time dobije "utjecaj" pojedinog tonaliteta u kompoziciji.

### 4.3.3 Težnja za ulaznom, silaznom ili konstantnom melodijskom konturom

Ovdje ispitujeemo težnju melodijske konture da raste, pada, ili bude konstantna. Računa se gustoća rastućih, padajućih i unisonih intervala pomoću izraza

$$D_a = \frac{i_a}{n-1}; D_d = \frac{i_f}{n-1}; D_c = \frac{i_c}{n-1} \quad (4.16)$$

gdje su  $i_a, i_d, i_c$  brojevi rastućih, padajućih i unisonih intervala, respektivno.

Vrijednost n označava ukupni broj tonova u kompoziciji.

### 4.3.4 Stabilnost uzlazne, silazne, ili unisone melodijske konture

Ovo je mjera stabilnosti smjera melodije, povezana je s udjelom intervala koji se kreću u istom smjeru kao i susjedni.

Definira se kao

$$E_{ca} = \frac{i_{ca}}{n-1}; E_{cd} = \frac{i_{cd}}{n-1}; E_{cc} = \frac{i_{cc}}{n-1} \quad (4.17)$$

gdje  $E_{ca}$ ,  $E_{cd}$ ,  $E_{cc}$  predstavljaju stabilnost uzlaznih, silaznih i unisonih kontura, a  $i_{ca}$ ,  $i_{cd}$ ,  $i_{cc}$  broj uzlaznih, silaznih i unisonih intervala koji se kreću u istom smjeru kao i sljedeći (tj. miruju ako su unisoni). Vrijednost  $n$  označava ukupni broj tonova u kompoziciji. Ako zbrojimo vrijednosti tih stabilnosti, dobijemo ukupnu stabilnost konture

$$E_c = E_{ca} + E_{cd} + E_{cc}. \quad (4.18)$$

#### 4.3.5 Jačina klimaksa

Jačina klimaksa definirana je kao

$$I_c = \frac{1}{\eta_c}, \quad (4.19)$$

gdje je  $\eta_c$  broj puta koliko je klimaks (najviša) nota odsvirana u kompoziciji.

#### 4.3.6 Grafička prezentacija objektivnih svojstava kompozicije

Osim objektivnih statističkih vrijednosti, koje opisuju kompoziciju, korisno je i grafički prikazati neke glazbene karakteristike iste, pošto si pomoću slika možemo lakše predočiti tonalnu i ritmičku evoluciju melodije. Koristit ću distribuciju frekvencije pojave prelaza s tona na ton, distribuciju frekvencije pojave pojedinih tonova, sekvencijalni prikaz tonova te prikaz vjerojatnosti da je kompozicija u pojedinom tonalitetu (osnova je K-S metoda traženja tonaliteta).

### 4.4 *Subjektivna melodijska analiza*

#### 4.4.1 Melodijska kompleksnost

Istraživanje kognitivnog shvaćanja glazbe je do sad već dalo uvid u vezu između glazbene percepcije i melodijske kompleksnosti. EBM (Expectancy-Based Model) procesuirá MIDI melodije, i na temelju kolekcije finških narodnih napjeva, od kojih svaki ima pridjeljenu neku kompleksnost (ritmičku, tonalnu, te općenitu) dodjeljuje kompleksnost procesuiranoj melodiji. Srednja vrijednost te kolekcije napjeva je 5, sa stanardnom devijacijom 1. Ritmička, tonalna i općenita (tako da se ritmičke i tonalne vrijednosti budu u nekom skladu) kompleksnost se može izračunati pomoću funkcije *cobmplebm*, također iz paketa MIDI Toolbox. [7]

#### 4.4.2 Melodijska originalnost

D. K. Simonton je 10 godina (1984-1994) provodio studiju u kojoj je zaključio da je originalnost teme povezana s njezinom popularnosti. Veza između originalnosti i popularnosti ima oblik obrnutog slova U, tj. najneoriginalnije i najoriginalnije melodije su najmanje popularne, dok one sa srednjom originalnosti budu najslušanije. Simontonov model za račun melodijske originalnosti se bazira na vjerojatnostima tranzicije tonova. Dakle, Paisley je 1964. godine pokazao da su prve 4 note dovoljne da se jedinstveno i pouzdano odredi stil kompozitora, ali je Simonton uzeo njih 6. [6,9] Pratio je intervale među njima, tako da je u svakoj temi dobio 5 tonalnih tranzicija. Gledajući postotak tranzicija između 2 tona u svim djelima kompozitora, svakoj je dodjelio svojstvo *rijetkosti*. Ta "rijetkost" je bodovana kao negativni broj postotaka udjela određene tranzicije.

Neka se, npr. u jednoj od kompozitorovih sekvenci nalaze redom tonovi C-G-G-G-G-C, i neka se u ukupnom promatranom opusu kompozitora tranzicija G-G pojavila u 6% slučajeva, G-C u 5% slučajeva, a C-G u 4% slučajeva. Tada je bi spomenuta promatrana sekvenca zaradila melodijsku originalnost -27 (mogući rezultat ide od -30 za totalno dosadnu temu do 0 za veoma originalnu).

U MIDI Toolbox paketu melodijsku originalnost kompozicije računa funkcija *compltrans* (svojstvo "rijetkosti" računa iz baze od 15618 djela klasične glazbe, koje je Simonton proučavao).

#### 4.4.3 Stupanj melodioznosti

Stupanj melodioznosti je melodijski indikator, koji je uveo Euler u svojem djelu "Tentamen novae theoriae musicae" (Pokušaj nove teorije glazbe) 1739. godine. Prema njemu, melodioznost je vezana za kompleksnost mentalnog opterećenja slušatelja dok sluša pojedinu kompoziciju. Očekivano je, ako slušatelj radi manje "računskih operacija" dok sluša djelo, činit će mu se ugodnije.

Račun melodioznosti se proteže od prvog do zadnjeg intervala kompozicije. Za svaki interval  $i$  ( $i \in [1, m]$ , gdje je  $m$  ukupni broj intervala u melodiji koja se analizira), nova

vrijednost  $a_i = n(i)*d(i)$  se računa. Ovdje je  $n(i)/d(i)$  frekvencijski omjer trenutnog intervala (npr. čista kvinta ima frekvencijski omjer  $3/2$ , velika terca  $5/4$ , unisoni interval  $1/1...$ ). Tada,  $a_i$  se može rastaviti na umnoške potencija različitih prostih brojeva

$$a_i = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n} \quad (4.20)$$

gdje  $p_j$  predstavlja j-ti prosti broj,  $k_j$  je broj pojavljivanja broja  $p_j$ , a  $p_n$  je najveći prosti broj u  $a_i$ .

Stupanj melodioznosti od  $a_i$  je definiran kao

$$G(a_i) = \sum_{j=1}^n (k_j(p_j - 1) + 1) \quad (4.21)$$

a stupanj melodioznosti dane melodije kao srednja vrijednost  $G(a_i)$ , tj.

$$G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m G(a_i). \quad (4.22)$$

Niža vrijednost označava veću melodioznost.

## 5 Rezultati

Analizom je radi usporedbe obuhvaćeno 4 kompozicije nastale pomoću 4 različita IFS modela, te 3 varijacije nastale pomoću Lorenzovog modela na zadanu temu.

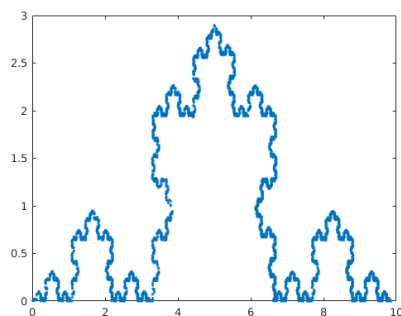
Promjenjivi faktori su kod kompozicija tonalitet generirane skale i, naravno, IFS model, dok su kao konstante držani faktor skaliranja izlaza IFS-a (IFSsc=10), broj iteracija (n=200), vezanje komponenti rješenja IFS-a za osnovne melodijske funkcije (X kontrolira visinu i trajanje tona, Y kontrolira dinamiku), tempo (bpm=30 [BPM]), te raspon naše skale (ukupni broj oktava je pet, početna je treća).

Kod varijacija na zadanu temu, promjenjivi faktori su početni uvjeti za varijacijsku trajektoriju i parametar varijacije, dok su kao konstante držani parametar Lorenzovog modela (r=30, kaotično područje), vezanje komponenti rješenja Lorenzovog modela za osnovne melodijske funkcije (X kontrolira visinu tona), te početni uvjeti za referentnu trajektoriju (1,1,0).

## 5.1 Kompozicije

### 5.1.1 DR

”DR” je naziv kompozicije koja je nastala pomoću IFS modela, čiji atraktor izgleda kao Kochova krivulja (5.1). Parametri algoritma su podešeni na taj način da su generirani



Slika 5.1: Kochova krivulja.

tonovi unutar a-mol prirodne ljestvice, što se vidi na notnom zapisu (slika 5.2). Oda-birom tona A kao tonike i postavljanjem polustupanjskih i cijelostupanjskih intervala na mjesta određena molskom ljestvicom, izrazili smo želju da stvorimo kompoziciju u a-mol tonalitetu. Pomoću K-S metode (rezultat na slici 5.3) i histograma (slika 5.4) ćemo vidjeti pretvara li se kompozicijski algoritam sa ovim IFS-om kao da ”nešto zna” o teoriji glazbe, iako zapravo ne zna ništa.

Sa slike 5.3 možemo očitati da je vjerojatnost da je kompozicija u a-molu jednaka go-tovo 100%. To što se tonovi nalaze u a-mol ljestvici zasigurno puno doprinosi rezultatu K-S metode, ali promotrimo još malo histograme 5.4.

Na lijevom (frekvencije pojavljivanja pojedinih tonova u melodiji) možemo vidjeti da se najčešće pojavljuju tonovi A i C, koji se nalaze na I. i III. stupnju a-mol ljestvice. Dodajmo još i ton E s V. stupnja a-mol ljestvice (nešto je manja frekvencija pojavlji-vanja, ali nije zanemariva), i dobijemo molski kvintakord (sastoji se od tonova A,C,E). Pogledajmo sada desni (frekvencije pojavljivanja prijelaza s tona na ton). Najčešće se pojavljuju intervali čista prima / čista oktava (A-A). Dakle, imamo čvrstu toniku. In-tervali mala terca (A-C), čista kvarta (A-D) i čista kvinta (A-E) se također pojavljuju u zanemarivom broju.

C dur ljestvica ima istu strukturu kao i a-mol ljestvica (paralelna joj je), ali nam očitavanje govori da je manje vjerojatno da je kompozicija u tom tonalitetu. Prvo tome treba tražiti uzrok u činjenici da je tonika na pogrešnom mjestu (A umjesto C, a i ton



Slika 5.2: Notni zapis kompozicije "DR".

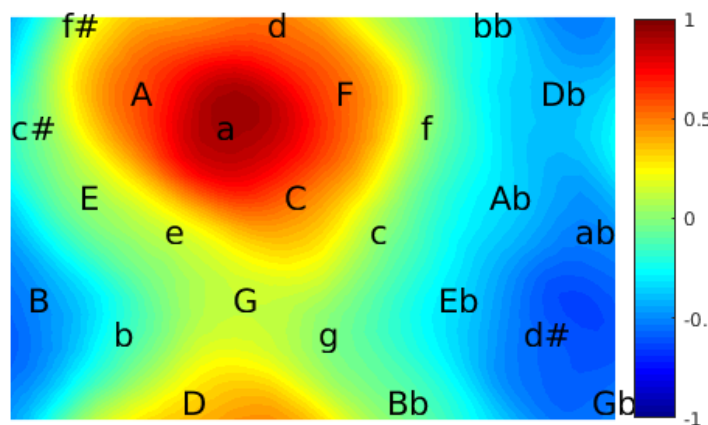
C se pojavljuje gotovo upola manje puta nego ton A). Dokaz da C nije tonika se može potražiti u desnom histogramu, gdje vidimo da je vrlo mala frekvencija prelaza C-C. Može se vidjeti i da je frekvencija prelaza A-C i C-A otprilike istovjetna, no interval velike sekste (C-A) nema toliku važnost za molski tonalitet kao interval mala terca (A-C).

Sve gore rečeno može se prepoznati u notnom zapisu (slika 5.2) u raznim oblicima.

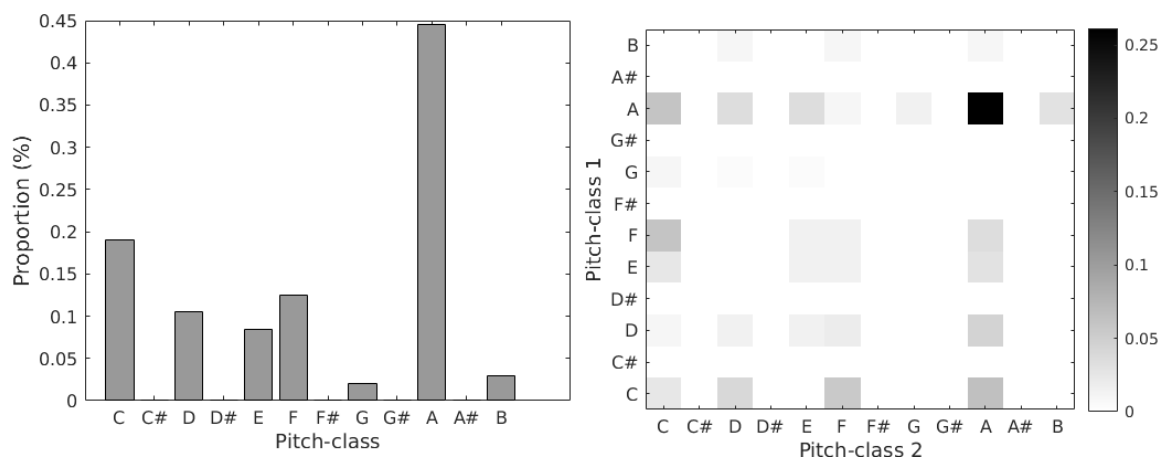
### Objektivne brojčane statističke veličine

Iako bi se na prvi pogled činilo da nam veličina  $V_t=0.06$  (*tonalna raznolikost*) govori da





Slika 5.3: Vjerojatnost da je kompozicija "DR" u pojedinom tonalitetu. Na dijagramu su poslagani durski (označeni velikim slovima) i molski (označeni malim slovima) tonaliteti po redu kvintnog kruga. Na skali desno od dijagrama se može očitati kojoj boji pripada određena vjerojatnost.

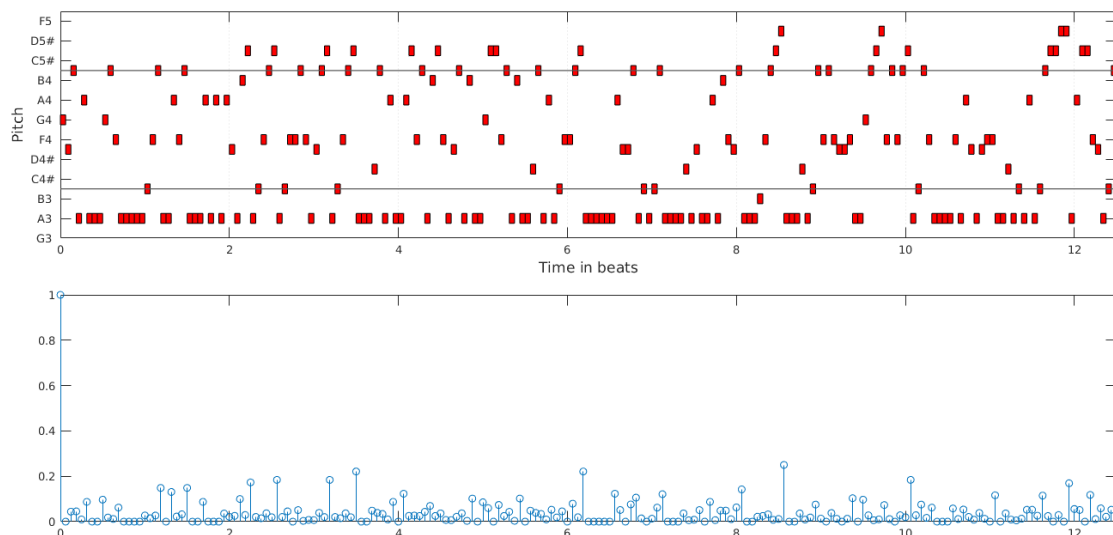


Slika 5.4: Lijevo: distribucija frekvencije pojave tonova. Ovaj histogram pokazuje koliki je udio pojave pojedinog tona (na y osi) u ukupnom broju svih mogućih tonova u kompoziciji "DR" (koji su prikazani na x osi, nije nužno da se svi pojavljuju u kompoziciji). Desno: distribucija frekvencije pojave prijelaza s tona na ton. Ovaj histogram pokazuje koliki je udio prijelaza među svim mogućim tonovima također u kompoziciji "DR" (na y osi se početni ton, na x osi se nalazi ton na koji se prelazi). Kao i kod lijevog histograma, nije nužno da se svi tonovi na osima nalaze u kompoziciji (ako nema tih prijelaza, označeni su sa bijelom bojom). Desno od histograma se nalazi skala, koja pridružuje boji na histogramu udio pojave određenog prijelaza.

se radi o samo par tonova koji se ponavljaju, pogled na sliku 5.5 će nas lako razuvjeriti. Naime, razlog tome treba tražiti u zaista jakoj tonici.

*Uzlazni melodijski profil, silazni melodijski profil i konstantni melodijski profil* ( $D_a=0.47$ ,  $D_d=0.32$ ,  $D_c=0.21$ ) nam govori (a možemo i na sekvencijalnom zapisu vidjeti) da globalno kompozicija više "raste" nego "pada".

Veličine *stabilnost uzlazne melodijske konture, stabilnost silazne melodijske konture i stabilnost konstantne melodijske konture* ( $E_{ca}=0.186$ ,  $E_{cd}=0.05$ ,  $E_{cc}=0.08$ ) nam pak



Slika 5.5: Sekvencijalni prikaz kompozicije "DR". U gornjem dijelu se vidi visina tona (na y-osi), prikazana pomoću crtom duljine tog tona u beatovima (na x-osi). U donjem dijelu se vide jačine mogućih odvajanja fraza.

govore da ima ponajviše vezanih uzlaznih intervala, te time potvrđuju ideju o "rastu" melodije. Iako silaznih intervala ima nešto više nego unisonih, ove vrijednosti nam govore kako su oni raspršeniji, te time se umanjuje dojam njihove prisutnosti.

*Jačina klimaksa* ( $I_c=0.25$ ): stabilnost uzlazne melodijske konture, i više uzlaznih intervala objašnjavaju ovu veličinu.

### Subjektivne brojčane statističke veličine

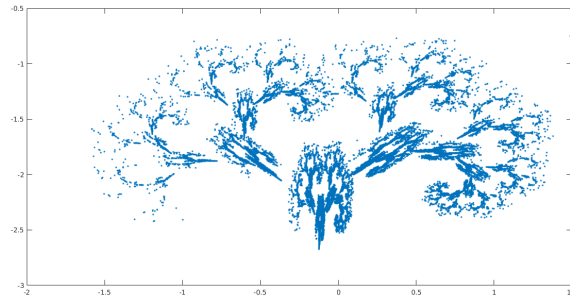
*Melodioznost* ( $G=4.85$ ) nam govori da je potreban popriličan broj računskih operacija u glavi slušaoca da bi se procesuirala ova kompozicija (npr., za "melodiju" koja se sastoji od istog broja intervala, ali da su svi unisoni, melodioznost bi bila  $G=1$ ).

*Mjera melodijske originalnosti* ( $O=-3.92$ ) nam govori da bi pri izvođenju ova kompozicija, među generalnom populacijom, mogla postići neki uspjeh (ne kao da je prosječne originalnosti, ali zasigurno više nego da je vrijednost na suprotnom kraju skale).

*EBM pitch, rhythm, joint* ( $p=5.21$ ,  $r=7.23$ ,  $j=5.72$ ) veličine nam daju objašnjenje razloga zašto nije moguće lako pronaći fraze u kompoziciji (oznake ispod sekvencijalnog zapisa). Naime,  $EBM(r)$  izlazi dosta izvan standardne devijacije.

#### 5.1.2 CBM

"CBM" je, za razliku od prethodne, naziv kompozicije čiji IFS atraktor izgleda kao javorov list (slika 5.6). Parametri algoritma su podešeni tako da su generirani tonovi



Slika 5.6: Javorov list.

unutar fis-mol prirodne ljestvice, što se vidi na notnom zapisu (slika 5.7). Odabirom tona FIS kao tonike i postavljanjem polustupanjskih i cijelostupanjskih intervala na mjesta određena molskom ljestvicom, stvaramo kompoziciju u fis-mol tonalitetu. Sa slike (5.8) možemo očitati da je vjerojatnost da je kompozicija u fis-molu jednaka približno 75%. Tonalitet baš nije u potpunosti pogođen, zapravo, malo je veća vjerojatnost nego paralelnog mu dura (što u prijašnjoj kompoziciji nije bio slučaj s paralelnim tonalitetom).

Daljnja analiza slijedi pomoću histograma (slika 5.9). Na lijevom histogramu (frekvencije pojavljivanja pojedinih tonova u melodiji) možemo vidjeti da se tonovi koji bi definirali fis-mol ljestvicu, FIS i CIS pojavljuju otprilike istom frekvencijom, dvostruko manjom nego ton d, koji za fis-mol ljestvicu nema neko veliko značenje (velika seksta na toniku). Ton A, koji bi činio na toniku interval male terce, se gotovo uopće ne pojavljuje. Tonski strukturalno gledano, algoritam je ovdje podbacio.

Desni histogram (frekvencije pojavljivanja prelaza s tona na ton) pokazuje da se najčešće se pojavljuju intervali čista kvinta na toniku (FIS-CIS), kao i čista kvinta na ton H (H-FIS), što bi s učestalom pojavom tona D tvorilo kvintakord na IV. stupnju fis mol ljestvice (H,D,FIS). A dur ljestvica ima istu strukturu kao i fis-mol ljestvica (paralelna joj je), ali nam očitavanje govori da je manje vjerojatno da je kompozicija u tom tonalitetu (iako, ne toliko manje kao u "DR"). Prvo tome treba tražiti uzrok u činjenici da je tonika na pogrešnom mjestu (A umjesto FIS, a i ton C se pojavljuje za gotovo trećinu manje puta nego ton A). Dokaz da A nije tonika se može potražiti u desnom histogramu, gdje vidimo da frekvencija prijelaza A-A isčezava, tj. tonovi A koji se pojave ne učvršćuju svoju poziciju kao toničnu.

D-mol, ako pogledamo graf K-S metode, se tu pojavljuje ponajviše zato što je frekvencija pojavljivanja tona D velika, i stalno se izmjenjuje sa tonom CIS, koji bi mu, u



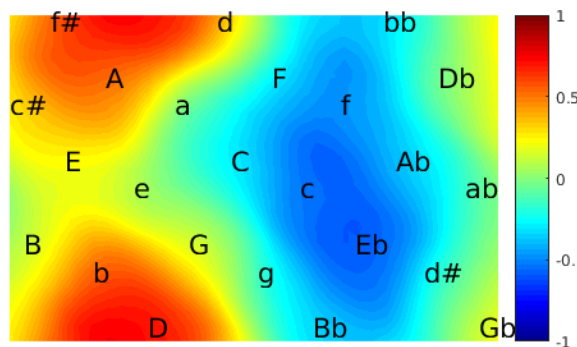
Slika 5.7: Notni zapis kompozicije "CBM".

slučaju ljestvice, bio vodica. Ali osim toga, d-mol (vidjet ćemo kasnije primjer kompozicije i u tom tonalitetu) nema baš nikakve veze s ovom melodijom, tako da ponekad, na temelju lažnih indicija, i K-S metoda zna zabluditi (iako je u dosta slučajeva poprilično točna).

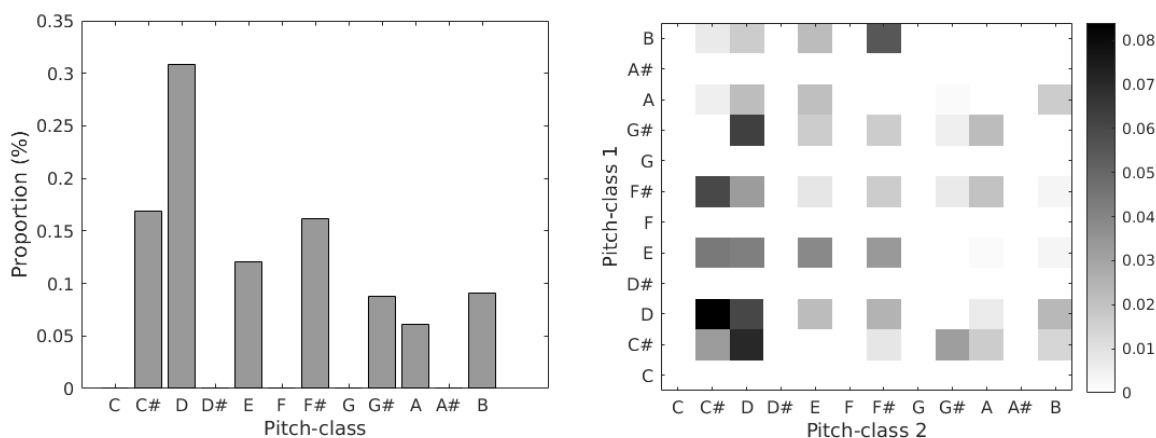
Sve gore rečeno se, kao i u "DR" može prepoznati u notnom zapisu u raznim oblicima.

### Objektivne brojčane statističke veličine

Ako ovdje razmatrajući rezultat  $V_t=0.08$  (*tonalna raznolikost*) steknemo pomisao da se



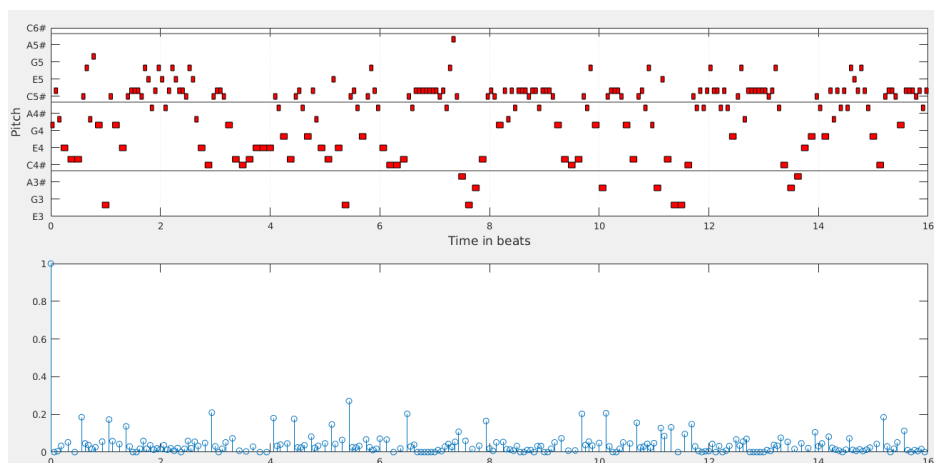
Slika 5.8: Vjerojatnost da je kompozicija "CBM" u pojedinom tonalitetu. Na dijagramu su poslagani durski (označeni velikim slovima) i molski (označeni malim slovima) tonaliteti po redu kvintnog kruga. Na skali desno od dijagrama se može očitati kojoj boji pripada određena vjerojatnost.



Slika 5.9: Lijevo: distribucija frekvencije pojave tonova. Ovaj histogram pokazuje koliki je udio pojave pojedinog tona (na y osi) u ukupnom broju svih mogućih tonova u kompoziciji "CBM" (koji su prikazani na x osi, nije nužno da se svi pojavljuju u kompoziciji). Desno: distribucija frekvencije pojave prijelaza s tona na ton. Ovaj histogram pokazuje koliki je udio prijelaza među svim mogućim tonovima također u kompoziciji "CBM" (na y osi se početni ton, na x osi se nalazi ton na koji se prelazi). Kao i kod lijevog histograma, nije nužno da se svi tonovi na osima nalaze u kompoziciji (ako nema tih prijelaza, označeni su sa bijelom bojom). Desno od histograma se nalazi skala, koja pridružuje boji na histogramu udio pojave određenog prijelaza.

radi samo o par tonova koji se ponavljaju, pogled na sliku 5.10 će nam dokazati da smo ovaj put bili u pravu. *Uzlazni melodijski profil, silazni melodijski profil i konstantni melodijski profil* ( $D_a=0.38$ ,  $D_d=0.47$ ,  $D_c=0.15$ ) nam govori (a možemo i na sekvencijalnom zapisu vidjeti) da globalno kompozicija više "pada" nego "raste".

Veličine *stabilnost uzlazne melodijske konture, stabilnost silazne melodijske konture i stabilnost konstantne melodijske konture* ( $E_{ca}=0.13$ ,  $E_{cd}=0.22$ ,  $E_{cc}=0.08$ ) nam pak govore da ima ponajviše vezanih silaznih intervala te time potvrđuju ideju o "padu" melodije. Odnosi vrijednosti uzlaznih, silaznih i konstantnih melodijskih kontura prate



Slika 5.10: Sekvencijalni prikaz kompozicije "CBM". U gornjem dijelu se vidi visina tona (na y-osi), prikazana pomoću crtom duljine tog tona u beatovima (na x-osi). U donjem dijelu se vide jačine mogućih odvajanja fraza.

odnose vrijednosti intervala.

*Jačina klimaksa* ( $I_c=1$ ): činjenica da ovdje nije čvrsta tonika može obrazložiti ovakav rezultat.

### Subjektivne brojčane statističke veličine

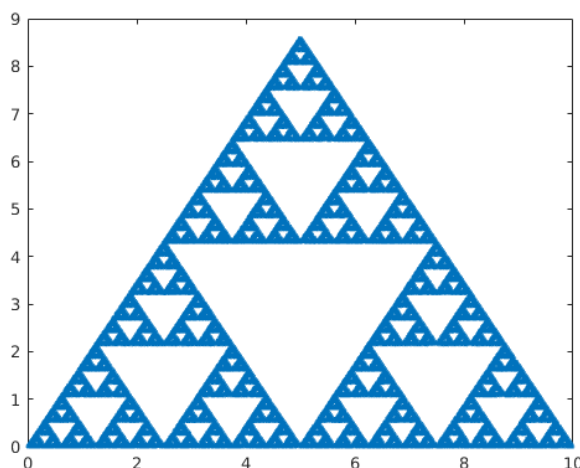
*Melodioznost* ( $G=6.5779$ ) nam govori da je potreban popriličan broj računskih operacija u glavi slušaoca da bi se procesuirala ova kompozicija (npr., za "melodiju" koja se sastoji od istog broja intervala, ali da su svi unisoni, melodioznost bi bila  $G=1$ ). Melodioznost je veća nego kod protekle kompozicije, ponajviše zato jer nemamo čvrstu toniku i nemamo stabilnu rastuću melodijsku konturu. Tonika, osim u glazbenoj teoriji i u ljudskom poimanju glazbe, ima važno mjesto (sjetite se samo atonalnih kompozicija).

*Mjera melodijske originalnosti* ( $O=-1.98$ ): neimanje stabilne tonike.

*EBM pitch, rythm, joint* ( $p=5.21$ ,  $r=7.23$ ,  $j=5.72$ ) veličine nam daju objašnjenje razloga zašto niti ovdje nije moguće lako pronaći fraze u kompoziciji (oznake ispod sekvencijalnog zapisa). Naime,  $EBM(r)$  izlazi dosta izvan standardne devijacije (iako, malo manje nego u "DR").

#### 5.1.3 Stela

"Stela" je naziv kompozicije čiji IFS atraktor izgleda kao trokut Sierpinskog (slika 5.11). Parametri algoritma su ovdje podešeni upravo tako da se generirani tonovi na-



Slika 5.11: Trokut Sierpinskog.

laze unutar fis-mol harmonijske ljestvice, što potvrđuje i pogled na notni zapis (slika 5.12). Odabirom tona FIS kao tonike i postavljanjem polustupanjskih i cijelostupanjskih intervala na mjesta određena molskom ljestvicom, izrazili smo želju da stvorimo kompoziciju u fis-mol tonalitetu (sa alteriranim VII. stupnjem). Sa slike 5.13 možemo očitati da je vjerojatnost da je kompozicija u fis-molu (s alteriranim VII. stupnjem) jednaka gotovo 100%. Tonalitet je gotovo u potpunosti pogođen (unatoč već spomenutoj alteraciji), zapravo, malo je veća vjerojatnost od paralelnog mu dura (što u prijašnjoj kompoziciji nije bio slušaj s paralelnim tonalitetom).

Daljnja analiza slijedi pomoću histograma (slika 5.14 ).

Na lijevom histogramu (frekvencije pojavljivanja pojedinih tonova u melodiji) možemo vidjeti da se tonika FIS često pojavljuje. I tonovi A i CIS se dosta pojavljuju, iako nešto manje nego što je za očekivati (moguće zbog alteracije). Ton F koji je nastao alteracijom se pojavljuje dosta rijede nego sama tonika (što je i za očekivati, jer da nije bilo alteracije, on ne bi niti sačinjavao strukturu ljestvice).

Pogledajmo sada desni histogram (frekvencije pojavljivanja prelaza s tona na ton). Najčešće se pojavljuje čista prima / čista oktava na tonici, tonu FIS, što nam govori kako imamo relativno jaku toniku u kompoziciji. Intervali male terce i čiste kvinte na tonici (FIS-A i FIS-CIS) su nešto slabije zastupljeni (iako postojani), no razlog za to opet treba tražiti u postojanju alteracije (koja, doduše, relativno malo alterira s tonikom), kao i za pojavljivanje samih tonova.

Kao i kod protekle dvije kompozicije, paralelni durski tonalitet nema nekog utjecaja, a u ovom slučaju još manji, jer uz čistu kvintu, koristi i interval male sekste.



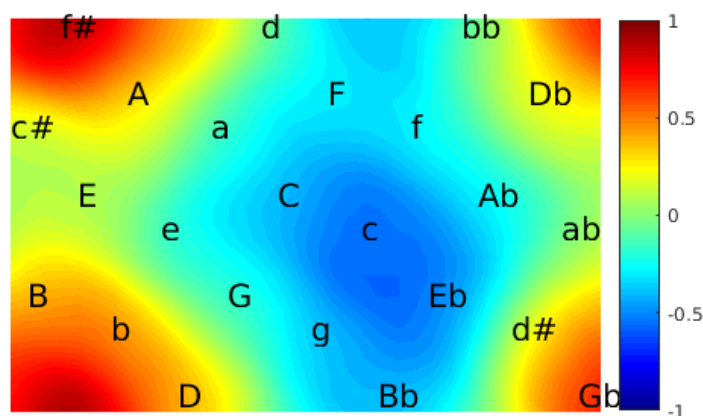
Slika 5.12: Notni zapis kompozicije "Stela".

### Objektivne brojčane statističke veličine

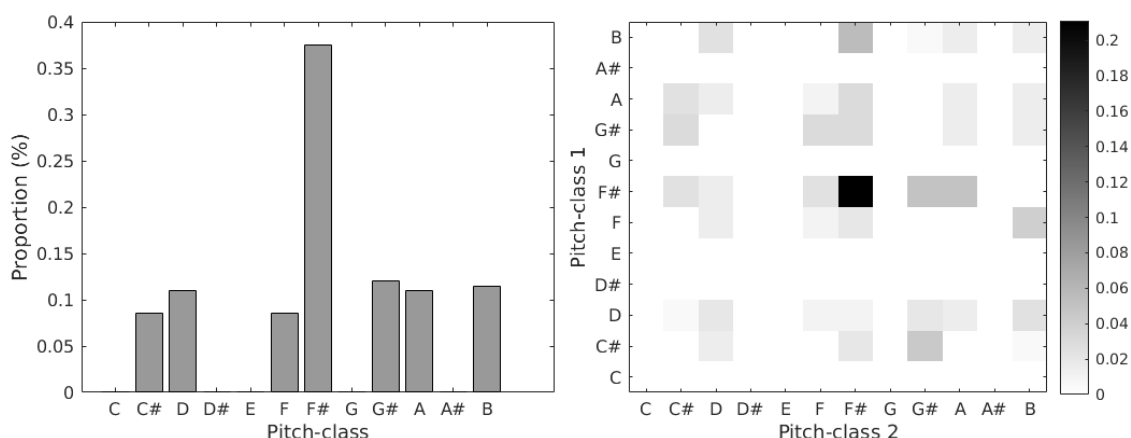
Rezultat  $V_t=0.07$  (*tonalna raznolikost*) nam, iako je male vrijednosti, govori o "raspršenosti" visine tonova. To se lijepo može vidjeti na sekvencijalnom prikazu (slika 5.15). *Uzlazni melodijski profil, silazni melodijski profil i konstantni melodijski profil* ( $D_a=0.44$ ,  $D_d=0.34$ ,  $D_c=0.22$ ) nam govori (a možemo i na sekvencijalnom zapisu vidjeti) da globalno kompozicija više "raste" nego "pada".

Veličine *stabilnost uzlazne melodijske konture, stabilnost silazne melodijske konture i stabilnost konstantne melodijske konture* ( $E_{ca}=0.17$ ,  $E_{cd}=0.09$ ,  $E_{cc}=0.12$ ) nam daju do





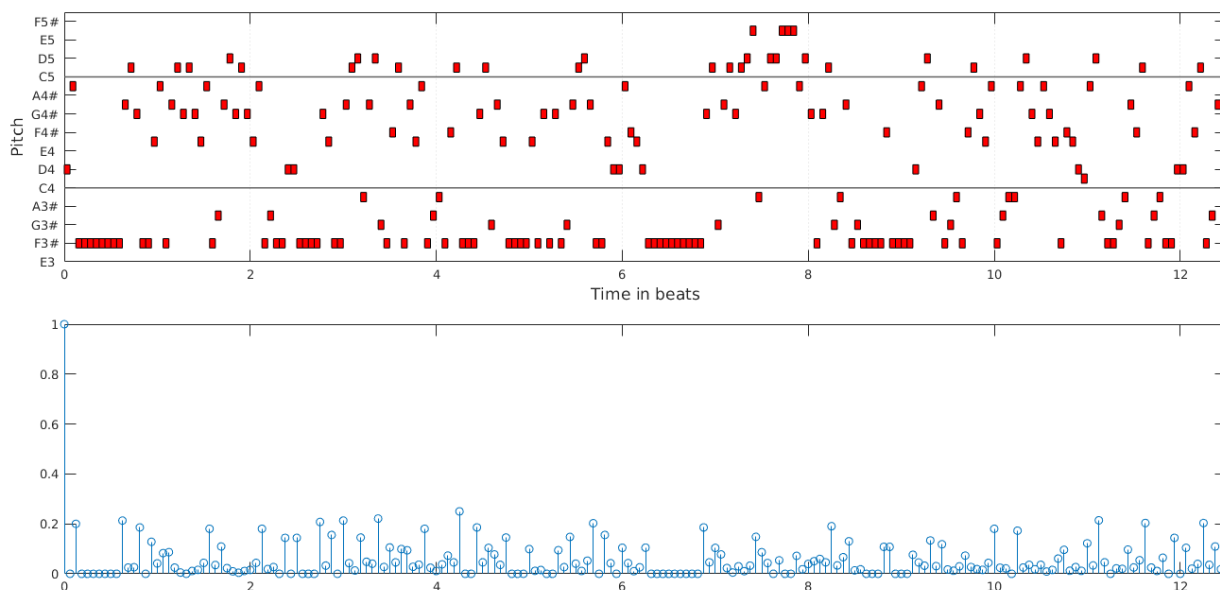
Slika 5.13: Vjerojatnost da je kompozicija "Stela" u pojedinom tonalitetu. Na dijagramu su poslagani durski (označeni velikim slovima) i molski (označeni malim slovima) tonaliteti po redu kvintnog kruga. Na skali desno od dijagrama se može očitati kojoj boji pripada određena vjerojatnost.



Slika 5.14: Lijevo: distribucija frekvencije pojave tonova. Ovaj histogram pokazuje koliki je udio pojave pojedinog tona (na y osi) u ukupnom broju svih mogućih tonova u kompoziciji "Stela" (koji su prikazani na x osi, nije nužno da se svi pojavljuju u kompoziciji). Desno: distribucija frekvencije pojave prijelaza s tona na ton. Ovaj histogram pokazuje koliki je udio prijelaza među svim mogućim tonovima također u kompoziciji "Stela" (na y osi se početni ton, na x osi se nalazi ton na koji se prelazi). Kao i kod lijevog histograma, nije nužno da se svi tonovi na osima nalaze u kompoziciji (ako nema tih prijelaza, označeni su sa bijelom bojom). Desno od histograma se nalazi skala, koja pridružuje boji na histogramu udio pojave određenog prijelaza.

znanja da ima ponajviše vezanih uzlaznih intervala, te time potvrđuju ideju o "rastu" melodije. Odnosi vrijednosti uzlaznih, silaznih i konstantnih stabilnosti melodijskih kontura ne prate odnosom vrijednosti melodijske profile, kao što je bio i slučaj u "DR". Dakle, iako se u kompoziciji nalazi više silaznih intervala nego konstantnih, oni su raspršeniji, pa se njihov utjecaj u globalu toliko ne vidi.

*Jačina klimaksa* ( $I_c=0.25$ ): ista vrijednost kao i kod kompozicije koja je nastala na fraktalu čiji je atraktor u obliku Kochove krivulje, povezljivo sa jakom tonikom i sta-



Slika 5.15: Sekvencijalni prikaz kompozicije "Stela". U gornjem dijelu se vidi visina tona (na y-osi), prikazana pomoću crtom duljine tog tona u beatovima (na x-osi). U donjem dijelu se vide jačine mogućih odvajanja fraza.

bilnosti uzlazne konture.

### Subjektivne brojčane statističke veličine

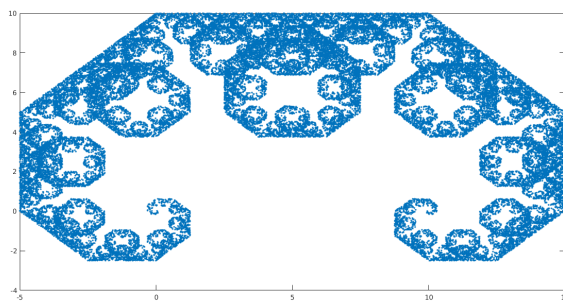
*Melodiznost* ( $G=5.9698$ ) nam govori da je potreban nešto manji broj računskih operacija u glavi slušaoca u odnosu na "CBM", ali nešto veći u odnosu na "DR" da bi se procesuirala ova kompozicija (npr., za "melodiju" koja se sastoji od istog broja intervala, ali da su svi unisoni, melodiznost bi bila  $G=1$ ). Najveći razlog što se ova vrijednost nalazi u "sendviču" protekle dvije treba tražiti u nešto jačoj tonici od druge kompozicije (ali ne kao kod "DR").

*Mjera melodijske originalnosti* ( $O=-1$ ): "Stela" je definitivno originalna, pošto ljestvica nema standardnu konstrukciju, a ovaj deskriptor radi sa standardnim ljestvicama..

*EBM pitch, rhythm, joint* ( $p=5.39$ ,  $r=7.23$ ,  $j=5.77$ ) Zanimljivo je kako su ove vrijednosti dosta bliske onima u "CBM", a kompozicije se po svojstvima jako razlikuju.  $EBM(r)$  je također izvan standardne devijacije, što objašnjava problem pri nalaženju mogućih fraza u "Steli".

#### 5.1.4 G-MiŽe

"G-MiŽe" je naziv kompozicije čiji IFS atraktor izgleda kao Levijev zmaj. (slika 5.16). Parametri algoritma su podešeni tako da su generirani tonovi unutar d-mol prirodne



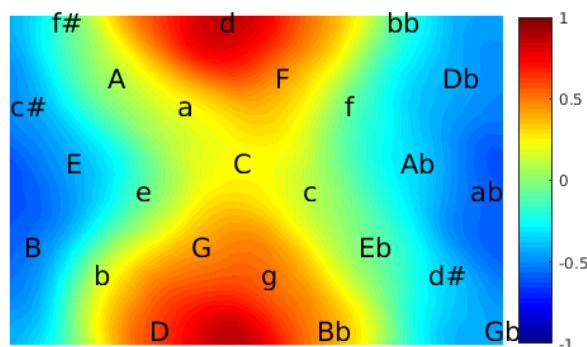
Slika 5.16: Levijev Zmaj.

ljestvice, što se vidi na notnom zapisu (slika 5.17). Odabirom tona D kao tonike i

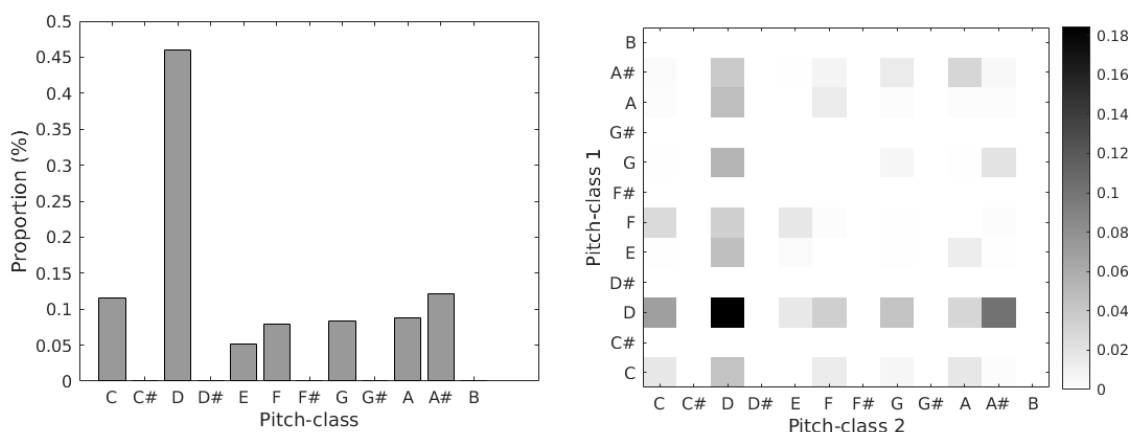
**G - M i ž e**

Slika 5.17: Notni zapis kompozicije "G-MiŽe".

postavljanjem polustupanjskih i stupanjskih intervala na mjesta određena molском лјествicom, izrazili smo želju da stvorimo kompoziciju u d-mol tonalitetu. Sa slike



Slika 5.18: Vjerojatnost da je kompozicija "G-Miže" u pojedinom tonalitetu. Na dijagramu su poslаgani durski (označeni velikim slovima) i molski (označeni malim slovima) tonaliteti po redu kvintnog kruga. Na skali desno od dijagrama se može očitati kojoj boji pripada određena vjerojatnost.



Slika 5.19: Lijevo: distribucija frekvencije pojave tonova. Ovaj histogram pokazuje koliki je udio pojave pojedinog tona (na y osi) u ukupnom broju svih mogućih tonova u "G-Miže" (koji su prikazani na x osi, nije nužno da se svi pojavljuju u kompoziciji). Desno: distribucija frekvencije pojave prijelaza s tona na ton. Ovaj histogram pokazuje koliki je udio prijelaza među svim mogućim tonovima u "G-Miže" (na y osi se početni ton, na x osi se nalazi ton na koji se prelazi). Kao i kod lijevog histograma, nije nužno da se svi tonovi na osima nalaze u kompoziciji (ako nema tih prijelaza, označeni su sa bijelom bojom). Desno od histograma se nalazi skala, koja pridružuje boji na histogramu udio pojave određenog prijelaza.

5.18 možemo očitati da je vjerojatnost da je kompozicija u d-molu jednaka gotovo 100%. Daljnja analiza slijedi pomoću histograma (slika 5.19). Na lijevom histogramu (frekvencije pojavljivanja pojedinih tonova u melodiji) vidimo da je frekvencija pojavljivanja tona D velika, dok je tonova F i A (mala terca i čista kvinta na toniku) nešto manja, ali opet dovoljna da se prepozna struktura tonaliteta u ljestvici.

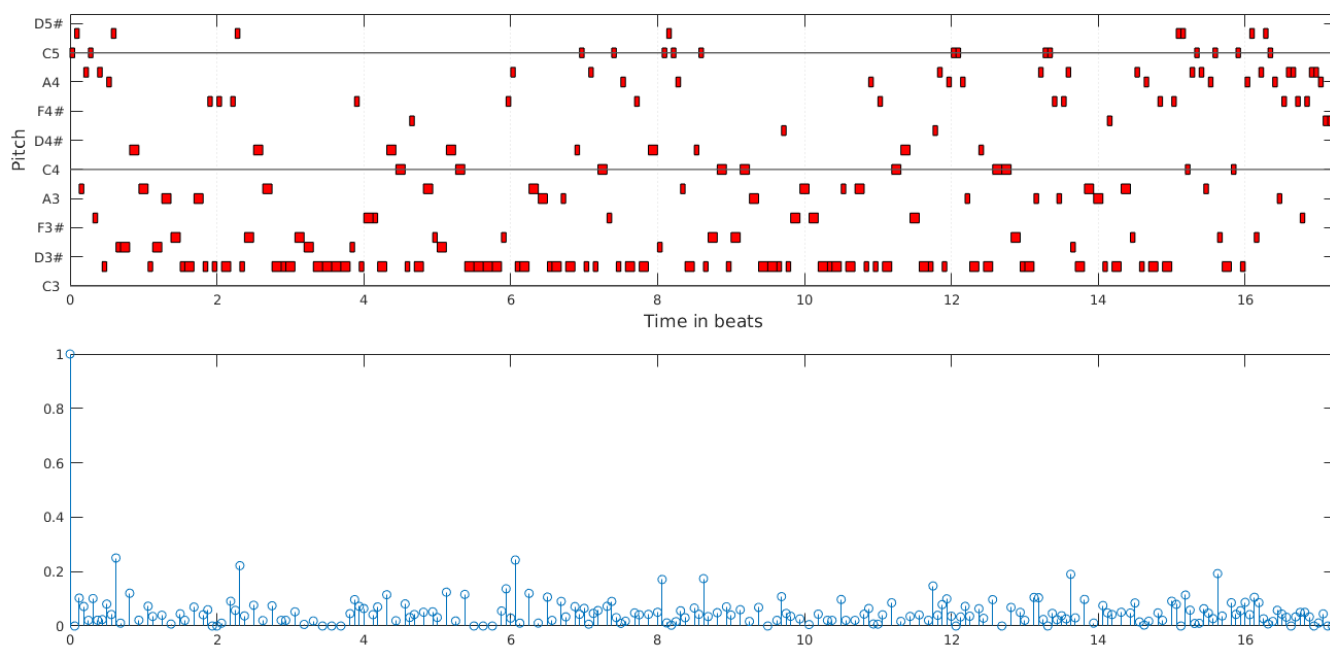
Pogledajmo sada desni histogram (frekvencije pojavljivanja prelaza s tona na ton). Najčešće se pojavljuje čista prima / čista oktava na toniku, što nam opet znači jaku toniku, kao i u dva slučaja od dosadašnja tri. Intervali male terce i čiste kvinte na toniku se, kao i konstituenti intervala, pojavljuju nešto rijede, ali kad su u igri, čine kompletni ili parcijalni molski kvintakord na I. stupnju.

Paralelni durski tonalitet, F dur, neću opisivati posebno, pošto ima gotovo identična svojstva kao i paralelni tonaliteti u prethodnim kompozicijama.

Kao i kod prethodnih kompozicija, dosadašnji navodi se mogu provjeriti i pronaći u dosta slučajeva ako se konzultira notni zapis.

### Objektivne brojčane statističke veličine

$V_t=0.075$  (*tonalna raznolikost*) nam, uz jaku toniku, znači dobro raspršenje visine tona, može se vidjeti na sekvencijalnom prikazu (slika 5.20). *Uzlazni melodijski profil, silazni*



Slika 5.20: Sekvencijalni prikaz kompozicije "G-MiŽe". U gornjem dijelu se vidi visina tona (na y-osi), prikazana pomoću crtom duljine tog tona u beatovima (na x-osi). U donjem dijelu se vide jačine mogućih odvajanja fraza.

*melodijski profil i konstantni melodijski profil* ( $D_a=0.44$ ,  $D_d=0.43$ ,  $D_c=0.13$ ) nam govori (a možemo ponovo na sekvencijalnom zapisu vidjeti) da globalno kompozicija otprilike u jednakoj mjeri "pada" i "raste".

Veličine *stabilnost uzlazne melodijske konture*, *stabilnost silazne melodijske konture* i *stabilnost konstantne melodijske konture* ( $E_{ca}=0.14$ ,  $E_{cd}=0.13$ ,  $E_{cc}=0.04$ ) informiraju

da ima nešto malo više uzlaznih vezanih intervala nego silaznih, te se stabilnost slaže po odnosu sa brojem intervala vezanih uz pojedinu stabilnost.

*Jačina klimaksa* ( $I_c=0.125$ ): jaka tonika i otprilike jednaka uzlazna i silazna stabilnost su glavni uzrok malo većem broju klimaksa od do sada uobičajenog.

### **Subjektivne brojčane statističke veličine**

*Melodioznost* ( $G=5.8543$ ) nam isto govori da je potreban popriličan broj računskih operacija u glavi slušatelja da bi se procesuirala "G-MiŽe" (npr., za "melodiju" koja se sastoji od istog broja intervala, ali da su svi unisoni, melodioznost bi bila  $G=1$ ). Melodioznost je malo manja nego kod prethodne kompozicije, dakle, također u "sendviču". *Mjera melodijske originalnosti* ( $O=-6.787$ ): ova kompozicija nije jako originalna, te ima najveću šansu od dosadašnjih da postane negdje hit. Razlog tome se može tražiti u gotovo jednakim ulaznim i silaznim stabilnostima melodijskih kontura. Nije baš originalno pustiti neku valnu funkciju preko signal generatora, i onda to proglasiti kompozicijom, a to je točno kako je ova ispala.

*EBM pitch, rythm, joint* ( $p=5.06$ ,  $r=6.46$ ,  $j=5.23$ ): analogno kao i u prethodnom primjeru.

## **5.2 Varijacije na temu**

Ideja je uzeti kompoziciju koju je napisao čovjek te napraviti algoritam koji će istu promjeniti, ali ne do neprepoznatljivosti. Kompoziciji je ime Anna-Mariae, a varijacijama na temu AMK1, AMK2 i AMK3.

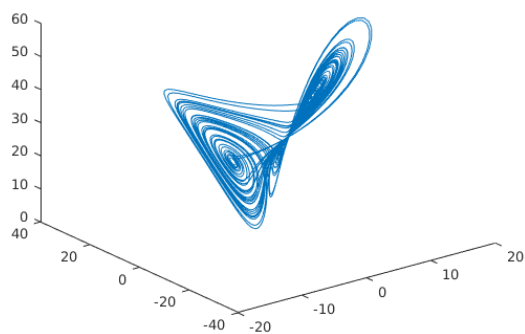
Pogon algoritma je, kako je već spomenuto, Lorenzov model, a atraktor koji pogoni baš ove varijacijske procese se može vidjeti na slici 5.21.

### **5.2.1 Tema za variranje**

Na slici 5.22 se nalazi notni zapis Anna-Mariae. Kompoziciju sam napisao u d-molu, a prikazani su prvih par taktova 1. dionice, koje ću varirati na 3 načina.

### **5.2.2 AMK1 - prva varijacija na temu**

Za prvu varijaciju su izabrani početni uvjeti za varijacijsku trajektoriju (1.5,1,0), a vrijednost parametra varijacije iznosi  $\mu=6$ . Notni zapis prve varijacije se može vidjeti



Slika 5.21: Lorenzov atraktor, generiran sustavom jednadžbi 2.18 za vrijednosti parametara  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r = 30$ .



Slika 5.22: Notni zapis kompozicije "Anna-Mariae".

na slici 5.23.



Slika 5.23: Notni zapis varijacije "AMK1".

### 5.2.3 AMK2 - druga varijacija na temu

Za drugu varijaciju su izabrani početni uvjeti za varijacijsku trajektoriju  $(1.2, 0.9, 0)$ , s vrijednosti parametra varijacije  $\mu=0.5$ . Notni zapis druge varijacije se može vidjeti na

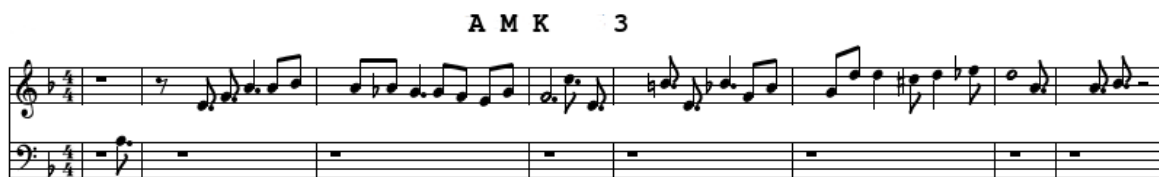
slici 5.24.



Slika 5.24: Notni zapis varijacije "AMK2".

#### 5.2.4 AMK3 - treća varijacija na temu

Za treća varijaciju su izabrani početni uvjeti za varijacijsku trajektoriju (1.1,0.9,0) te vrijednost parametra varijacije iznosi  $\mu=2$ . Notni zapis treće varijacije se može vidjeti na slici 5.25.



Slika 5.25: Notni zapis varijacije "AMK3".



## 6 Zaključak

Izrađene su analize kompozicija koje je stvorio algoritam (temeljen na algoritmu predstavljenom u [6]) pogonjen sa 4 različita IFS atraktora. Svaka od njih ima svojih zanimljivosti, koje bi bile još izraženije da sam rezultate koje sam atraktor daje više skalirao. Ali, pošto sam htio izvući van srž samog atraktora, nisam pretjerivao s time. Iako sam bio ponešto kritičan u analizi oko slabije tonike kod "CBM", ne može se reći da je atraktor u obliku Javorovog lista kao pogonsko oruđe algoritma neupotrebljiv za glazbenu kompoziciju, pogotovo u domeni modernih glazbenih kompozicija. Ostali rezultati daju odgovor na pitanje postavljeno pri analizi kompozicije "DR": čini se da algoritmi ipak nešto "znaju" o pravilima glazbenog komponiranja. Može se možda reći da je Javorov list "lošiji kompozitor" od Kochove pahuljice, Trokuta Sierpinskog ili Levijevog Zmaja. Što se tiče varijacija na zadanu temu, vidljivo je usporedbom odstupanja notnog zapisa varijacija od zadane teme sa faktorom varijacija, da što je veća vrijednost faktora, to su varijacije izraženije. To nije čudno, pošto taj faktor označava do koje vrijednosti su prihvaćena "odstupanja".

Sve u svemu, moglo bi se, isprobavajući algoritam na više različitih IFS atraktora, kao i probavanjem različitih vrijednosti početnih uvjeta i var. parametara pri varijacijama na zadanu temu opisanih u ovom radu svašta izvući, pa naći i pogodnije platforme za računalnu kompoziciju.

## 7 Metodički dio

### 7.1 *Nastavna priprema: Deterministički kaos*

[10,11] Nastavna priprema na temu "Deterministički kaos" je predviđena za dva školska sata za četvrti razred matematičke gimnazije, kao izborno gradivo. Vrsta nastave je interaktivna istraživački usmjerena nastava. Nastavni sat je zamišljen da se provodi frontalno. Nastavne metode koje će se koristiti tijekom izvođenja sata su demonstracija pokusa (pravog i video zapis), metoda razgovora - razredna rasprava i metoda pisanja/crtanja. Nastavna pomagala i sredstva potrebna za izvesti ovako zamišljeni nastavni sat su: računalo, projektor, obično njihalo sa letvicom na kojoj visi metalna kuglica, ploča i kreda.

Učenik će nakon odslušanog sata moći:

- \*razlikovati regularno od kaotičnog ponašanja
- \*dati primjer kaotičnog sustava
- \*opisati kaotični sustav pomoću bifurkacijskog dijagrama
- \*objasniti što je to atraktor
- \*razviti svoj model kaotičnog sustava i opisati ga pomoću determinističke jednadžbe

Učenik će na satu razvijati sposobnosti:

- \*komunikacije
- \*znanstvenog i logičkog zaključivanja
- \*usmenog i pismenog izražavanja
- \*istraživačkog pristupa problemu
- \*apstraktnog razmišljanja
- \*proporcionalnog zaključivanja
- \*analiziranja i opisivanja vlastitih opažanja

Tijekom sata, učenik će usvajati vrijednosti poput:

- \*uljudnosti i poštovanja drugih učenika
- \*razvoja pozitivnog odnosa prema radu
- \*formiranja vlastitog mišljenja na temelju činjenica
- \*argumentiranje vlastitog mišljenja
- \*izražavanje vlastitog i uvažavanje tuđeg mišljenja

### **7.1.1 Uvodni dio sata: otvaranje problema, prikupljanje ideja, upoznavanje pojave**

*Pred učenicima se na stolu nalazi njihalo, sa metalnom kuglicom koja visi na letvici.*

#### **UVODNO PITANJE:**

**Pogledajmo ovo njihalo. Ja dignem kuglicu iz ravnotežnog položaja. Koje sam početne uvjete zadao time kuglici?** Učenici počnu raspravljati, zaključe da su zadani početni položaj i početna brzina.

**Ako ja sad kuglicu pustim, možete li predvidjeti kako će se gibati?** Učenici

se nakon kraće rasprave slože oko toga, te opišu gibanje, koje ja puštanjem kuglice iz ruke potvrdim.

Dakle, mogu li ja za kuglicu, ako imam zadane fiksne početne uvjete, predvidjeti kako će se gibati? Učenici se slože da da.

Takvi sustavi se nazivaju *determinističkim dinamičkim sustavima*, njihovi procesi su opisani *determinističkim jednadžbama*, shvaćanje da su sustavi koji su opisani determinističkim jednadžbama predvidljivi u ponašanju se naziva *klasični determinizam*, a takav predvidljiv režim evolucije sustava se naziva *regularni režim*. Veličine koje su fiksne pri evoluciji dinamičkog sustava nazivaju se *parametri* (npr. dužina letvice njihala u ovom slučaju), a veličine koje se mijenjaju (npr. trenutna brzina i položaj kuglice) nazivaju se *varijable*.

Na projektor se prikaže zaustavljen video na početku s internet adrese:

<https://www.youtube.com/watch?v=hTe6tRPROjI>

Ovdje je situacija ista kao i u prijašnjem pokusu, samo što se na podnožju nalazi poslagano više magneta. Jesu li i ovdje određeni početni položaj i brzina za njihalo? Učenici se slože da jesu.

Možete li pretpostaviti kako će se sad to njihalo gibati? Učenici daju razne pretpostavke. Vidjet ćemo sad tko je od vas bio u pravu, pusti se video dalje.

Nakon videa: Što ste opazili svaki put kad čovjek pomakne kuglicu u (približno) isti početni položaj? Učenici zaključe nakon kraće rasprave da se kuglica giba na totalno drugačiji način. Za sustav s takvim ponašanjem se kaže da je *osjetljiv na početne uvjete*. Nepredvidivost sustava opisanog determinističkim jednadžbama naziva se *determinističkim kaosom*, a kad je sustav nepredvidiv, kaže se da je u *kaotičnom režimu*. Na ploču naslov: "DETERMINISTIČKI KAOS".

### 7.1.2 Središnji dio sata: konstrukcija modela - fizikalni i matematički opis pojave.

#### ISTRAŽIVAČKO PITANJE:

#### KAKO SE PONAŠAJU KAOTIČNI SUSTAVI?

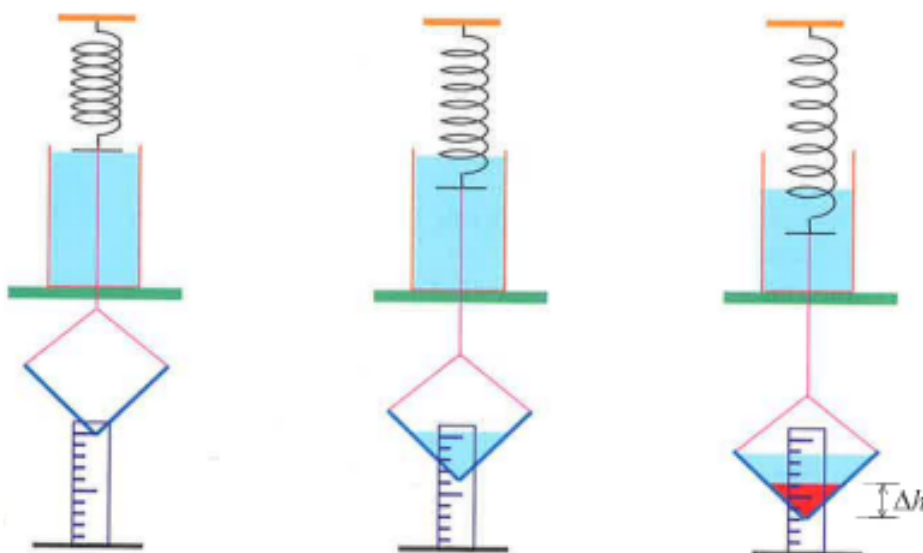
Da bismo bolje shvatili što se tu događa, opisat ćemo jedan dinamički sustav

**i izvesti njegovu determinističku jednadžbu.**

#### Misaoni pokus

Posudu oblika kvadra napunimo vodom (slika 7.1 lijevo). Neposredno ispred posude visi opruga (daje povratnu silu  $\vec{F} = -k\vec{x}$ ), a o njoj druga posuda koja je prazna i ima oblik trostrane prizme. Na donjem kraju opruge je pločica koja služi kao pokazivač. Kada je donja (viseća) posuda prazna, pokazivač je na razini vode u gornjoj posudi.

Ulijemo li nešto vode u donju posudu, ona će se spustiti i pritom rastegnuti oprugu (slika 7.1 sredina). Uočimo položaj donjeg ruba te posude na ravnanu, i položaj pokazivača na gornjoj posudi. Iz gornje posude ispustimo kroz otvor na dnu dio vode koji se nalazi iznad pokazivača i uhvatimo je u donju posudu (slika 7.1 desno). Donji rub donje posude sada je za  $\Delta h$  niži u odnosu na položaj prije dodavanja vode. Na kraju, ispustimo iz donje posude dio vode određen tim pomakom  $\Delta h$ .



Slika 7.1: Uz izvod determinističke jednadžbe.

#### Izvod determinističke jednadžbe sustava

Zadatak je predvidjeti kolika će biti masa vode u donjoj posudi nakon ispuštanja, ako znamo koliko je bila prije dodavanja u istu.

Krenimo sa opažanjem da je masa vode ispuštene iz gornje posude i dodane u donju posudu ( $\Delta m_1$ ) razmjerna je početnoj masi vode u donjoj posudi ( $m_0$ )

$$\Delta m_1 = k_1 m_0. \quad (7.1)$$

Masa vode koju moramo ispustiti iz donje posude razmjerna je njezinom obujmu, a on je razmjernan kvadratu pomaka ( $\Delta h^2$ , treću dimenziju možemo postaviti kao neku konstantu), a pomak masi vode dodane u donju posudu. Može se pokazati da je masa ispuštene vode ( $\Delta m_2$ ) razmjerna kvadratu dodane mase

$$\Delta m_2 = k_2 \Delta m_1^2 = k_2 (k_1 m_0)^2. \quad (7.2)$$

**Nakon dodavanja i ispuštanja vode, kako izraziti masu vode u donjoj posudi?**

$$m_1 = m_0 + \Delta m_1 - \Delta m_2 = m_0 + k_1 m_0 - k_2 (k_1 m_0)^2$$

$$m_1 = m_0 (1 + k_1 - k_1^2 k_2 m_0). \quad (7.3)$$

Ako uzmemo sad da je  $1 + k_1 - k_1^2 k_2 = k$ , jednadžba 7.3 izgleda nešto jednostavnije:

$$m_1 = k m_0 (1 - m_0). \quad (7.4)$$

**Ako gornju posudu ponovo napunimo vodom, dio vode izlijemo iz nje u donju posudu, a zatim odgovarajući dio ispustimo iz donje posude, i tako n puta, izraz (7.4) se može generalizirati kao**

$$m_{n+1} = k m_n (1 - m_n). \quad (7.5)$$

Jednadžba 7.5 je dakle deterministička jednadžba opisanog sustava.

**Koje su vrijednosti u izrazu 7.5 parametri, a koje varijable?** Učenici gotovo odmah zaključe da je smisleno da je  $k$  parametar, a mase se mijenjaju

Vidimo da uz  $1 + k_1 - k_1^2 k_2 = k$  masa  $m_n$  ne može biti veća od 1. To automatski vrijedi i za  $m_{n+1}$ , pa iz toga proizlazi nejednadžba

$$k m_n (1 - m_n) \leq 1. \quad (7.6)$$

**Riješite kvadratnu nejednadžbu, i nađite koji su uvjeti za  $k$  da nejednadžba ima realna rješenja!** Nakon kraćeg računanja, učenici zaključe da je  $0 < k \leq 4$ , pošto ima smisla samo ako je rješenje realan broj. **Ponavljanje postupka zadanog**

jednadžbom 7.5 se naziva *iteriranjem*, a vrijednosti dobivene tim postupkom *iterandima*.

*Slike iteracijskih rubnih uvjeta i iteranada na projektor*

Izvršimo sada po nekoliko iteracija za različite parametre  $k$  i početne uvjete  $m_0$ , pa vidimo kako će se naš dinamički sustav ponašati.

Na slici 7.2 su prikazani iterandi sustava sa početnim uvjetima  $k=1,6$ ;  $m_0=0,90000000$ .

$k = 1,6; m_0 = 0,90000000$

$m_1 = 0,14400003$	$m_2 = 0,19722242$	$m_3 = 0,25332118$	$m_4 = 0,30263930$
$m_{19} = 0,37499988$	$m_{20} = 0,37499996$	$m_{21} = 0,37500000$	$m_{22} = 0,37500000$

Slika 7.2: Rezultati iteracija za  $k=1,6$ ;  $m_0=0,90000000$ .

Nakon 20 iteracija svi iterandi imaju istu vrijednost (0,3750000). Tu vrijednost nazivamo *atraktorom perioda 1*.

Na slici 7.3 su prikazani iterandi sustava sa početnim uvjetima  $k=1,6$ ;  $m_0=0,50000000$ .

$k = 1,6; m_0 = 0,50000000$

$m_1 = 0,40000000$	$m_2 = 0,38400000$	$m_3 = 0,37847040$	$m_4 = 0,37636888$
$m_{15} = 0,37500008$	$m_{16} = 0,37500004$	$m_{17} = 0,37500000$	$m_{18} = 0,37500000$

Slika 7.3: Rezultati iteracija za  $k=1,6$ ;  $m_0=0,50000000$ .

Dakle, parametar  $k$  ostaje iste vrijednosti, dok se vrijednost početne mase mijenja. Ovdje se nakon 16 iteracija pojavljuje isto rješenje (atraktor perioda 1) kao i u prošlom slučaju, ali nakon 20 iteracija.

Na slici 7.4 su prikazani iterandi sustava sa početnim uvjetima  $k=3,2$ ;  $m_0=0,90000000$ .

$k = 3,2; m_0 = 0,90000000$

$m_1 = 0,28800006$	$m_2 = 0,65617928$	$m_3 = 0,72194568$	$m_4 = 0,64236836$
$m_{23} = 0,79945488$	$m_{24} = 0,51304572$	$m_{25} = 0,79945544$	$m_{26} = 0,51304456$
$m_{27} = 0,79945552$	$m_{28} = 0,51304444$	$m_{29} = 0,79945552$	$m_{30} = 0,51304444$

Slika 7.4: Rezultati iteracija za  $k=3,2$ ;  $m_0=0,90000000$ .

Sada se vrijednost parametra  $k$  mijenja, uz jednaku vrijednost početne mase kao i u prvom slučaju. Nakon 26 iteracija, iterandi poprimaju dvije naizmjenične vrijednosti (0,7994552 i 0,51304444), što znači da se ovdje radi o *atraktoru perioda 2*.

$k = 3,2; m_0 = 0,20000000$			
$m_1 = 0,51200000$	$m_2 = 0,79953920$	$m_3 = 0,51288404$	$m_4 = 0,79946880$
$m_6 = 0,79945760$	$m_7 = 0,51304044$	$m_8 = 0,79945584$	$m_9 = 0,51304388$
$m_{10} = 0,79945552$	$m_{11} = 0,51304444$	$m_{12} = 0,79945552$	$m_{13} = 0,51304444$

Slika 7.5: Rezultati iteracija za  $k=3,2$ ;  $m_0=0,20000000$ .

Na slici 7.5 su prikazani iterandi sustava sa početnim uvjetima  $k=3,2$ ;  $m_0=0,20000000$ . Parametar  $k$  zadržava istu vrijednost kao i u prošlom slučaju, dok se vrijednost početne mase poprilično smanji. Nakon 9 iteracija, iterandi poprimaju dvije naizmjenične vrijednosti (0,7994552 i 0,51304444), kao i u prošlom slučaju (atraktor perioda 2).

**Što uočavamo, kako promjena parametra  $k$ , a kako promjena početne mase  $m_0$  utječe na period atraktora dinamičkog sustava?** Učenici zaključe da promjena vrijednosti parametra  $k$  utječe na period atraktora i iterande, dok promjena mase  $m_0$  mijenja samo iteraciju na kojoj će se atraktor pojaviti.

**Doprinosi li nam promjena početne mase ikako istraživanju kako se mijenjaju vrijednosti i periodičnost atraktora?** Učenici zaključe da ne.

*Dalje držimo početnu masu fiksnom* Na slici 7.6 su prikazani iterandi sustava sa početnim

$k = 3,5; m_0 = 0,90000000$			
$m_1 = 0,31500006$	$m_2 = 0,75521256$	$m_3 = 0,64703296$	$m_4 = 0,79933456$
$m_{34} = 0,87499720$	$m_{35} = 0,38281984$	$m_{36} = 0,82694080$	$m_{37} = 0,50088404$
$m_{38} = 0,87499728$	$m_{39} = 0,38281968$	$m_{40} = 0,82694072$	$m_{42} = 0,50088420$
$m_{42} = 0,87499728$	$m_{43} = 0,38281968$	$m_{44} = 0,82694072$	$m_{45} = 0,50088420$

Slika 7.6: Rezultati iteracija za  $k=3,5$ ;  $m_0=0,90000000$ .

uvjetima  $k=3,5$ ;  $m_0=0,90000000$ . **O kojem atraktoru se radi ovdje?** Učenici prepoznaju da se radi o atraktoru perioda 4, vrijednosti očitaju iz slike. Na slici 7.7 su prikazani iterandi sustava sa početnim uvjetima  $k=3,55$ ;  $m_0=0,90000000$ . **A koji se atraktor ovdje pojavio?** Učenici uoče atraktor perioda 8, vrijednosti očitaju iz slike. **Sad kad ste uspjeli prepoznati atraktore, možete li reći što to je atraktor?** Učenici razmišljaju, i zaključe da su to rješenja za koja se dinamički sustav "zakvačio". **Jeste li uspjeli u dosadašnjim slučajevima predvidjeti kako će se dinamički sustav nastaviti ponašati? U kakvom je režimu sustav?** Učenici odgovore potvrdno, samo promatraju atraktor. Prepoznaju da se sustav nalazi u regularnom režimu.

$k = 3,55; m_0 = 0,90000000$			
$m_1 = 0,31950006$	$m_2 = 0,77184016$	$m_3 = 0,62516540$	$m_4 = 0,83188432$
$m_{82} = 0,88168424$	$m_{83} = 0,37032584$	$m_{84} = 0,82780536$	$m_{85} = 0,50603000$
$m_{86} = 0,88737088$	$m_{87} = 0,35480048$	$m_{88} = 0,81265568$	$m_{89} = 0,54047480$
$m_{90} = 0,88168432$	$m_{91} = 0,37032568$	$m_{92} = 0,82780520$	$m_{93} = 0,50603024$
$m_{94} = 0,88737088$	$m_{95} = 0,35480048$	$m_{96} = 0,81265568$	$m_{97} = 0,54047480$
$m_{98} = 0,88168432$	$m_{99} = 0,37032568$	$m_{100} = 0,82780520$	$m_{101} = 0,50603024$

Slika 7.7: Rezultati iteracija za  $k=3,55$ ;  $m_0=0,90000000$ .

Na slici 7.8 su prikazani iterandi sustava sa početnim uvjetima  $k=3,8$ ;  $m_0=0,60000000$ ,

$k = 3,8; m_0 = 0,60000000; n = 1000$			
$m_1 = 0,91200000$	$m_2 = 0,30497280$	$m_3 = 0,80546464$	$m_4 = 0,59542716$
$m_{997} = 0,91662544$	$m_{998} = 0,29040832$	$m_{999} = 0,78307104$	$m_{1000} = 0,64550896$

Slika 7.8: Rezultati iteracija za  $k=3,8$ ;  $m_0=0,60000000$ .

do 1000 iteracija. **Možete li ovdje naći atraktor?**

Učenici zaključue da ne. Na slici 7.9 su prikazani iterandi sustava sa početnim uvjetima

$k = 3,8; m_0 = 0,60000100; n = 1000$			
$m_1 = 0,9119992800$	$m_2 = 0,3049750400$	$m_3 = 0,8054680000$	$m_4 = 0,5954192800$
$m_{997} = 0,79462408$	$m_{998} = 0,62014724$	$m_{999} = 0,89514560$	$m_{1000} = 0,35666784$

Slika 7.9: Rezultati iteracija za  $k=3,8$ ;  $m_0=0,60000100$ .

$k=3,8$ ;  $m_0=0,60000100$ , do 1000 iteracija. **A pojavljuje li se ovdje kakav atraktor?** Učenici ga ne pronalaze.

U oba prethodna slučaja nismo pronašli periodičnost. Osim toga, vrlo mala razlika u početnoj vrijednosti mase ima za posljedicu ogromnu razliku u 1000-tom iterandu. Ta pojava se naziva *ekstremnom osjetljivošću na početne uvjete*.

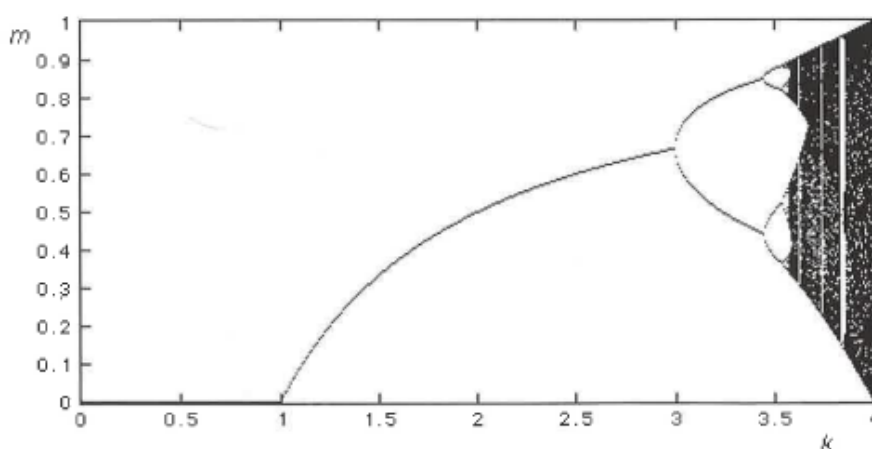
**Možete li predvidjeti daljnje ponašanje sustava, tj. iterande? U kojem režimu je dinamički sustav sada? Kako biste nazvali atraktor takvog sustava?** Učenici se slože da ne, te da je u kaotičnom režimu. Uz malo razmišljanja i dogovaranja, zaključue da se radi o KAOTIČNOM ATRAKTORU.



### 7.1.3 Završni dio sata: primjena modela - korištenje novostečenog znanja u novim situacijama, provjera ostvarenosti obrazovnih ishoda

#### *Bifurkacijski dijagram na projektor*

Na slici 7.10 je prikazana ovisnost vrijednosti iteranada o parametru  $k$ . Mogu se uočiti bifurkacije perioda atraktora za određene vrijednosti parametra. Zatamnjeno područje odgovara kaotičnom atraktoru. Svijetle pruge koje se uočavaju unutar istog se nazivaju *prozori regularnosti*. Vrlo su uske, što znači da malom promjenom parametra  $k$  sustav može prijeći iz kaotičnog režima u regularni režim.



Slika 7.10: Bifurkacijski dijagram za naš sustav.

#### 7.1.4 Zadaci

Vratimo se malo na naša njihala. Možete li se prisjetiti u kojoj se glavnoj stvari razlikovalo njihalo koje se gibalo predvidljivo od onog koje se nije gibalo predvidljivo? Učenici zaključuju da su to bili oni magnetići na podnožju. Usporedbom s dinamičkim sustavom koji smo sad razvili, što bi kod njihala moglo predstavljati promjenu parametra? Učenici zaključuju da bi to mogla biti prisutnost/odsutnost magnetića. To je točno, ali kako još možemo njihalo dovesti iz kaotičnog u regularni režim, ali da nam ostanu magnetići na podnožju? Učenici promišljaju, i kažu da postavimo magnetiće tako da pogodimo prozor periodičnosti.

Zaključili ste ranije da atraktor čine rješenja za koja se sustav "zakvači". Ali kako sad kod kaotičnog atraktora? Gdje bi se tu sustav mogao "zakvačiti"?

Učenici razmišljaju i razmišljaju i svašta im pada na pamet, sve dok im na projektor ne pokažem LORENZOV KAOTIČNI ATRAKTOR (slika 2.11).

Postoji jedan primjer koji se često provlači u medijima, a naziva se "leptirov efekt". Je li tko čuo kad za to? *Ako se netko javi da je, kažem neka ispriča priču ostatku razreda. Ako nitko nije čuo, ili je to pogrešno što učenik priča, ja ispričam priču.* Dakle, ideja je da se atmosfera ponaša kao kaotični sustav. I leptir kad zamahne krilima, promjeni početne uvjete (kao i čovjek na onom njihalu na videu) kaotičnog sustava, i onda na drugom kraju svijeta nakon nekog vremena zbog toga nastane tornado. Mislite li da je to stvarno moguće?. Većina učenika će se složiti da nije. **A zašto mislite da nije?** Učenici počnu raspravljati, ja podržim ideje koje imaju smisla, objasnim zašto druge ne bi mogle imati smisla. Dobro, ali neki od bitnijih razloga su što bi trebalo jako dugo vremena da se takve male peturbacije sustava, kao što je udarac leptirovih krila razvije u nešto što bi moglo utjecati na vremenske prilike, a i u Lorenzovom modelu, po kojem je ta priča i složena, nije definirano dosta parametara, poput viskoznih efekata, zbog kojeg bi u potpunosti isčezao bilo kakav utjecaj na atmosferu od strane zamaha tog leptira. A i na samu "kratkodosežnost" vremenske prognoze ne utječu toliko peturbacije (iako se radi o kaotičnim modelima, pa se to u medijima zna naglasiti), koliko manjkavi modeli sa puno aproksimacija kojima se danas fizičari u meteorologiji koriste. [12]

# Dodaci

## Dodatak A IFS kodovi

$$\begin{aligned}f_1(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\f_2(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \\f_3(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Slika A.1: Kodovi za generiranje IFS fraktala, trokuta Sierpinskog. Vjerojatnosti svake transformacije se nalaze po Moranovom teoremu [4], faktor kontrakcije  $r=1/2$ .

$$\begin{aligned}f_1(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\f_2(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \\f_3(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{bmatrix} \\f_4(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Slika A.2: Kodovi za generiranje IFS fraktala, Kochove krivulje. Vjerojatnosti svake transformacije se nalaze po Moranovom teoremu [4], faktor kontrakcije  $r=1/3$ .

$$\begin{aligned}f_1(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\f_2(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \\f_3(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{bmatrix} \\f_4(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Slika A.3: Kodovi za generiranje IFS fraktala, Levy-evog zmaja. Vjerojatnosti svake transformacije se nalaze po Moranovom teoremu [4], faktor kontrakcije  $r=1/\sqrt{2}$ .

a	b	c	d	e	f	p
0.14	0.01	0.00	0.51	-0.08	-1.31	0.10
0.43	0.52	-0.45	0.50	1.49	-0.75	0.35
0.45	-0.49	0.47	0.47	-1.62	-0.74	0.35
0.49	0.00	0.00	0.51	0.02	1.62	0.20

Slika A.4: Kodovi za generiranje IFS fraktala, Javorov list. Vjerojatnosti svih transformacija su vidljive na slici (označene sa "p").

## Literatura

- [1] Strogatz, Steven H.: Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry and engineering. 2nd ed. Boulder : Westview Press, 2015.
- [2] Schuster, Heinz Georg : Deterministic chaos : an introduction. 4th ed. Weinheim : WILEY-VCH Verlag GmbH, 2005.
- [3] Lorenz, Edward N. : Deterministic Nonperiodic Flow, Journal of the atmospheric sciences, 1963.
- [4] Fernandez-Martinez,M., Guirao, J.L.G, Sanchez-Granero,M.A: Generalizing Moran's theorem, arXiv, 2016.
- [5] Petrović, T.: Osnovne teorije glazbe. 3. izdanje. Zagreb : HDGT, 2010.
- [6] Coca, Andres E., Tost, Gerard O., Zhao, L.: Characterizing chaotic melodies in automatic music composition : CHAOS 20, 2010.
- [7] Earola, T., Toiviainen P. : MIDI Toolbox 1.1 : MATLAB Tools for Music Research, Department of Music, University of Jyväskylä, Finland, 2016.
- [8] Krumhansl, Carol L. : Cognitive foundations of musical pitch. 1st ed. Oxford, Oxford university press, 1990.
- [9] Simonton, D. K. : Thematic fame and melodic originality in classical music: A multivariate computer-content analysis, Journal of Personality 48:2, Duke University Press, 1980.
- [10] Jurišić, K. Negativni električni kapacitet. Diplomski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2017.

- [11] Labor, J. : Fizika 4: udžbenik za 4. razred gimnazije. 2. izdanje. Zagreb : Alfa, 2010.
- [12] The butterfly effect, wikipedia [https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly\\_effect#In\\_physical\\_systems](https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_effect#In_physical_systems)